RWTH AACHEN

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Institut für Mathematik

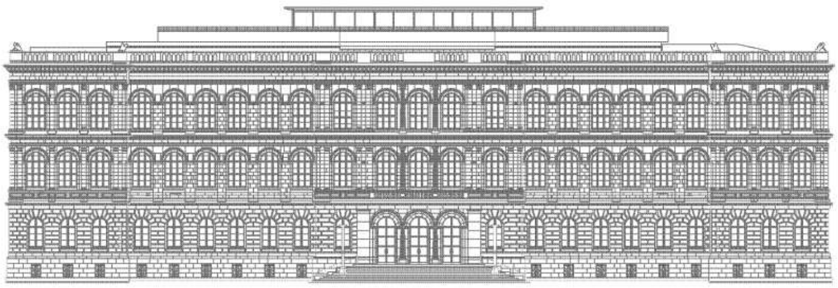
Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur

by

J. Bemelmans

Report No. **48** 2011

January 2011



Institute for Mathematics, RWTH Aachen University

Templergraben 55, D-52062 Aachen
Germany

Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur

J. Bemelmans
Vortrag am Institut für Mathematik der RWTH Aachen*

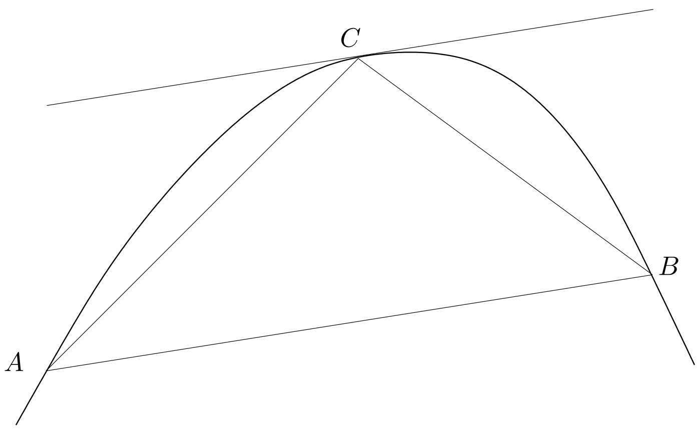
17. Dezember 2010

In diesem Vortrag möchte ich verschiedene Beiträge aus der Antike vorstellen, in denen es um eine Parabel geht. Zum einen führe ich den Beweis von Archimedes vor, der als erster den Flächeninhalt unter der Parabel berechnet hat. Dann geht es um die Entdeckung der Parabel durch Menaechmus, der als erster Kegelschnitte untersuchte. Die Bezeichnungen Parabel, Ellipse und Hyperbel gehen auf Apollonius zurück, der als Definition für die verschiedenen Kegelschnitte solche Gleichungen wählte, dass die Bezeichnung mit den Begriffen Parabel, Ellipse und Hyperbel aus der Rhetorik erst möglich wurde. Zum Schluss gebe ich einige Beispiele für die Parabel als literarische Form an und gehe auf deren Interpretation ein.

1 Die Integration der Parabel durch Archimedes

1.1 Der Flächeninhalt eines Parabelsegments

In seiner Schrift „Die Quadratur der Parabel" beweist Archimedes den folgenden Satz:



Auf einer Parabel fixieren wir zwei Punkte A und B. Dann schneidet die Sehne AB aus der Parabel ein Segment. Dessen Flächeninhalt ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC mal $4/3$, wobei C der Scheitelpunkt des Parabelsegments ist, d.h. der Punkt, in dem eine Parallele zu AB die Parabel berührt.

* Für die Arbeit an diesem Manuskript danke ich meinen Assistenten Dipl.-Math. J. Brand und Dr. F. Roeser sehr herzlich.

1.2 Mechanische Beobachtung und geometrischer Beweis

Wie jede klassische Schrift beginnt auch die des Archimedes mit einer Anrede an den Empfänger, Dositheus, und einer Zusammenfassung bzw. Überschrift. Dabei fällt auf, dass Archimedes die Behauptung des Satzes zuerst durch eine mechanische Betrachtung gefunden ($\varepsilon\dot{\upsilon}\rho\varepsilon\vartheta\acute{\varepsilon}\nu$), danach *auch* durch eine geometrische Überlegung bewiesen hat ($\dot{\varepsilon}\pi\iota\delta\varepsilon\iota\chi\vartheta\acute{\varepsilon}\nu$).

Der Gegensatz zwischen „finden“ (heureka, ich habe gefunden, soll Archimedes gerufen haben, als er den Auftrieb schwimmender Körper verstanden hatte) und „beweisen“ wird noch deutlicher, wenn wir der Handschrift $\mathscr{B}$ folgen, vgl. auf Seite A1 den kritischen Apparat zu Zeile 12: $\kappa\alpha\acute{\iota}$] A, om. $\mathscr{B}$, d.h. omittit $\mathscr{B}$. Die lateinische Handschrift $\mathscr{B}$ von Willem van Moerbeke hat also das $\kappa\alpha\acute{\iota}$ ausgelassen. Diese Übersetzung stammt aus dem 13. Jahrhundert; Willem van Moerbeke hat viele griechische Schriften, vor allem die des Aristoteles, übersetzt. Die anderen Textzeugen für die Werke von Archimedes sind mindestens 200 Jahre jünger, und von Willem van Moerbeke weiß man, dass er sich in der Regel sehr eng an die griechischen Vorlagen hielt.

Die mechanische Analyse behandelt das Gleichgewicht, in dem das Parabelsegment und das Dreieck sein müssen, wenn man sie mit gleicher Dichte annimmt.

Bemerkenswert ist, dass der Beweis mit geometrischen Mitteln erfolgen muss; das nämlich ist die damals akzeptierte Methode, etwas zu beweisen (Und so bleibt es bis in die Zeit Newtons!), wenn es nicht um Primzahlen oder dergleichen geht.
Das einzige mir bekannte Beispiel eines „arithmetischen“ Beweises ist der Nachweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Der wird indirekt geführt, und offensichtlich war er im 4. Jahrhundert v. Chr. so bekannt, dass Aristoteles in der „Lehre vom Satz“, einem der fünf Bücher des Organon, diesen Sachverhalt als Beispiel für einen indirekten Beweis angibt. Dabei führt er den Beweis nicht aus, sondern „erinnert“ die Leser/Hörer nur daran, dass eine Zahl zugleich gerade und ungerade wäre, wenn $q^2 = 2$ für eine rationale Zahl q erfüllt wäre.

Dass es nötig ist, das Original zu lesen, zeigt die deutsche Übersetzung von A. Czwalina, Ostwalds Klassiker, 1923, Nachdruck Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1972. Er übergeht den Unterschied zwischen „finden“ und „beweisen“, vgl. Seite A2. Auf einen weiteren Eintrag im kritischen Apparat möchte ich hinweisen. Zu Zeile 13 vermerkt der Herausgeber J. L. Heiberg, dass er ein $o\tilde{\upsilon}\nu$ (also) hinzugefügt habe, das in den wichtigen Textzeugen A und $\mathscr{B}$ nicht enthalten ist. Solche Konjekturen sind zulässig, solange sie entsprechend gekennzeichnet sind. Wir werden in der englischen Übersetzung von T. L. Heath einen Zusatz zur Summation der geometrischen Reihe finden, den Heath so darstellt, als ob er von Archimedes stammte, vgl. S. 5.

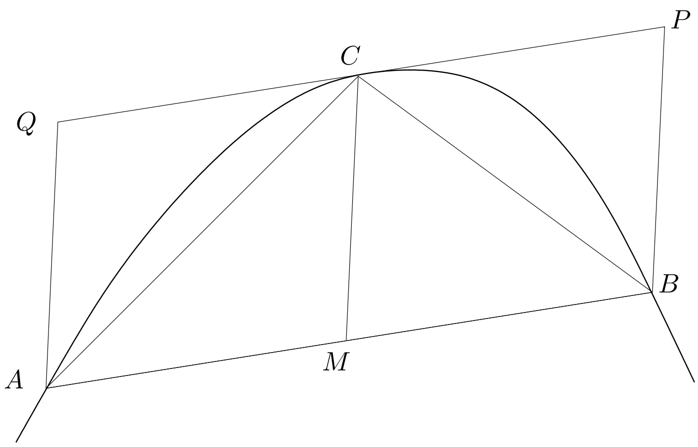
Eine weitere Stelle in der Einleitung ist bemerkenswert, und zwar handelt es sich dabei um ein Lemma, das wir heute Satz des Archimedes nennen: Wenn zwei Flächen ungleichen Inhalt haben, dann ist ein genügend großes Vielfaches der Differenz größer als ein vorgegebener Flächeninhalt, vgl. Seite A3. Dieser Satz beinhaltet, wie wir später sehen werden, den Begriff des Grenzwertes, wie ihn die griechischen Mathematiker verstanden haben. Archimedes verweist darauf, dass auch andere Geometer, insbesondere Euklid, diesen Satz verwandt haben (ebenso wie er in anderen Schriften).

1.3 Lemma:

Es sei C der Scheitel über dem Segment AB. Dann gilt

$$|\triangle ABC| > \frac{1}{2}|P(AB)|,$$

wobei $|P(AB)|$ der Flächeninhalt des Parabelsegments ist.

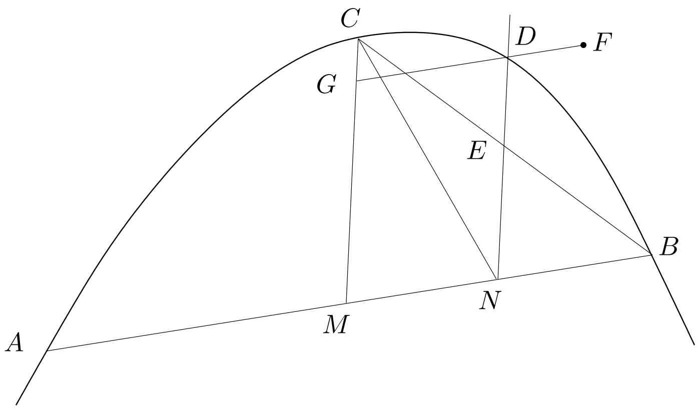


Beweis. Es sei M der Mittelpunkt von AB; AQ und BP seien parallel zu CM, und $QP||AB$. Dann ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABPQ$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABC; mit $|\Diamond ABPQ| > |P(AB)|$ folgt die Behauptung. □

1.4 Lemma:

Sei D der Scheitel über dem Segment CB. Dann gilt

$$|\triangle CBD| = \frac{1}{8}|\triangle ABC|.$$



Beweis. Archimedes benutzt einige Eigenschaften der Parabel, die damals bekannt waren; da Beweise aus der griechischen Mathematik nicht überliefert sind, wollen wir hier auf eine Begründung verzichten. So gilt: Wenn CM parallel zur Symmetrieachse der Parabel ist, dann ist M der Mittelpunkt von AB. Wenn nun C Scheitel über AB und D Scheitel über CB ist, und CM sowie DN parallel zur Symmetrieachse sind, dann teilt M die Strecke AB und E die Strecke CB.

Sei N der Schnittpunkt von AB mit DE. $\triangle MCB$ und $\triangle NEB$ sind ähnlich, also ist N der Mittelpunkt von MB.

Es gilt folgende Charakterisierung der Parabel: Sei F ein Punkt in der Ebene, $GF||AB$ und G liege auf CM. Dann liegt F genau dann auf der Parabel, d.h. es ist $F = D$, wenn

$$CM \cdot GF^2 = CG \cdot MB^2.$$

Für $F = D$ ist also

$$\frac{CM}{CG} = \frac{MB^2}{GD^2}.$$

GD und MN sind gleich lang, da es sich um gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm handelt. Also ist auch

$$\frac{CM}{CG} = \frac{MB^2}{MN^2} = 4,$$

da N der Mittelpunkt von MB ist.
$DN = GM = \frac{3}{4}CM$, da $CM : CG = 4$.
Die Dreiecke MCB und NEB sind ähnlich, also

$$\begin{aligned} NE &= \frac{1}{2}CM \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4CG \\ &= 2\,CG \\ &= 2\,DE. \end{aligned}$$

$|\triangle CNE| = 2|\triangle CED|$, da beide Dreiecke dieselbe Höhe haben, nämlich den Abstand von C zur Basis NE bzw. ED, aber das eine hat eine doppelt so große Basis.
Ebenso ist $|\triangle NEB| = 2|\triangle BED|$, da beide Dreiecke wiederum dieselbe Höhe haben, nämlich den Abstand von C zur Basis NE bzw. ED, und NE doppelt so groß ist wie ED.
Addition liefert:

$$\begin{aligned} |\triangle CNB| = {}& |\triangle CEN| + |\triangle NEB| \\ = {}& 2|\triangle CED| + 2|\triangle BED| \\ = {}& 2|\triangle CBD|\,. \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt ist also

$$|\triangle CDB| = \frac{1}{2}|\triangle CNB| = \frac{1}{8}|\triangle ABC|.$$

Die letzte Identität gilt, da $AB = 4NB$, also $|\triangle CNB| = \frac{1}{4}|\triangle ABC|$. $\square$

1.5 Summation einer geometrischen Reihe

Um $P(AB)$ auszuschöpfen, beginnen wir mit $\triangle ABC$; es sei $A_0 = |\triangle ABC|$. Im nächsten Schritt kommen zwei Dreiecke hinzu, die jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{8}A_0$ haben; also ist nach zwei Schritten der Flächeninhalt $A_0 + A_1$, und für A_1 gilt $A_1 = \frac{1}{4}A_0$, usw.

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = A_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A_0.$$

Dies beweist Archimedes so:

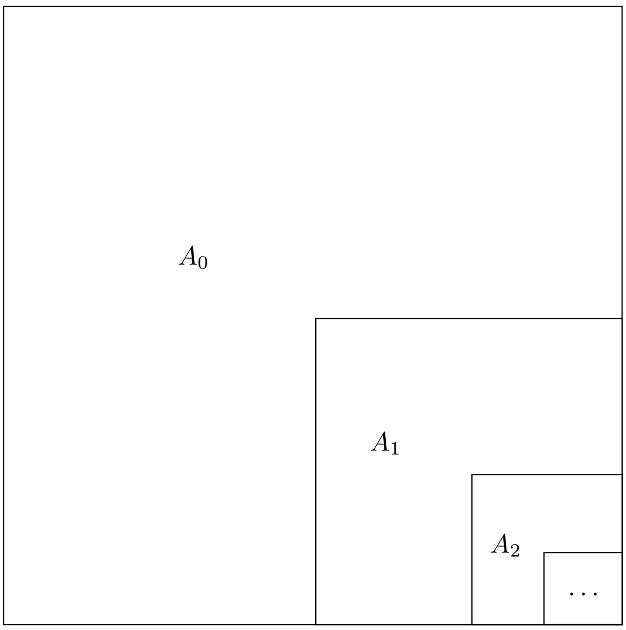
Setze $a_i = \frac{1}{3}A_i$; dann ist

$$A_i + a_i = \left(1 + \frac{1}{3}\right) A_i = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} A_{i-1} = \frac{1}{3} A_{i-1},$$

also:

$$\begin{aligned}
& A_1 + \cdots + A_N + a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N &&= \frac{1}{3}(A_0 + \cdots + A_{N-1}) \\
& \qquad\qquad a_1 + \cdots + a_{N-1} &&= \frac{1}{3}(A_1 + \cdots + A_{N-1}) \\
\Rightarrow\quad & A_1 + \cdots + A_N \qquad\qquad + a_N &&= \frac{1}{3}\ A_0 \\
\Leftrightarrow\quad & A_0 + \cdots + A_N \qquad\qquad + a_N &&= \frac{4}{3}\ A_0.
\end{aligned}$$

Einen Grenzübergang in dem Sinne, dass $a_N \to 0$ für $N \to \infty$ ausgenutzt wird, führt Archimedes nicht aus. Er beweist aber, dass $|P(AB)| = \frac{4}{3}A_0$ sein muss, indem er die Fälle $|P(AB)| > \frac{4}{3}A_0$ und $|P(AB)| < \frac{4}{3}A_0$ ausschließt.



In der englischen Übersetzung der Werke des Archimedes durch T. L. Heath findet sich ein geometrischer „Beweis“, den Archimedes *hätte* finden können.

Wenn A_0 das große Quadrat ist, $A_1 = \frac{1}{4}A_0$ das nächste usw., dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}\ A_0 + \frac{3}{4}A_1 + \cdots &=& \ A_0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{4}(\ A_0 + \quad A_1 + \cdots) &=& \ A_0 \\ \Leftrightarrow\ & \quad A_0 + \quad A_1 + \cdots &=& \frac{4}{3}A_0. \end{aligned}$$

Heath bringt diese Zeichnung ohne Kommentar im Archimedes-Text, vgl. Seite A4, aber die kritische Ausgabe der Werke von Archimedes kennt diese Zeichnung nicht, vgl. Seite A5.

Zudem nutzt der Beweis, den Archimedes angibt, die Zusammenhänge, die die Zeichnung veranschaulicht, nicht aus.

Die Summenformel für die allgemeine, endliche geometrische Reihe findet man in Buch IX, Prop. 35, der Elemente von Euklid.

1.6 Beweis von $|P(AB)| = \frac{4}{3}|\triangle ABC|$

i) Angenommen, es wäre $|P(AB)| \equiv S > \frac{4}{3}A_0$, $E := |P(AB)| - \frac{4}{3}A_0$. Dann ist

$$S = A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \varepsilon_n = \frac{4}{3}A_0 + E,$$

wobei ε_n der Flächeninhalt des nach n Schritten noch nicht bedeckte Anteils von $P(AB)$ ist.

Nach dem Lemma wird ε_n in jedem Schritt um mehr als den Faktor 2 kleiner, also wird für n genügend groß

$$\varepsilon_n < E,$$

d.h. $A_0 + \cdots + A_n > \frac{4}{3}A_0$. Das widerspricht aber der Summenformel in 1.5.

ii) Angenommen, es wäre $S < \frac{4}{3}A_0$. Analog zu i) ist für n genügend groß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\ A_n &<& \ \frac{4}{3}\ A_0 - S \\ \Rightarrow\ & \frac{4}{3}\ A_0 &<& \ A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \frac{4}{3}A_0 - S \\ \Rightarrow\ & \quad S &<& \ A_0 + \ldots + A_n, \end{aligned}$$

was unmöglich ist, da die Dreiecke ja in $P(AB)$ enthalten sind.

1.7 Vergleich mit dem Vorgehen heute

Vergleicht man das Vorgehen von Archimedes mit der heute gebräuchlichen Integration, dann fallen zunächst zwei gravierende Einschränkungen auf. Natürlich liegt in der Ausschöpfung der Parabel ein Grenzprozess vor; aber der ist insofern eingeschränkt, als er nicht zu einer neuen Größe (einer reellen Zahl) führt, sondern nur möglich ist, wenn das Ergebnis des Grenzprozesses auf andere Weise schon bekannt ist, hier als ein rationales Vielfaches des Flächeninhalts eines Dreiecks.

Eine zweite Einschränkung betrifft die Kurve, die den Bereich definiert, um dessen Flächeninhalt es geht. Wir können heute ganz einfach den Flächeninhalt unter der Kurve $y = x^\alpha$ für beliebige $\alpha > 0$ bestimmen, wohingegen Archimedes Eigenschaften der Parabel ausnutzt, die für beliebige Kurven $y = x^\alpha$ nicht gelten. Das liegt daran, dass wir cartesische Koordinaten verwenden. Sie sind wohl zurecht als der Einzelschritt in der Mathematik bezeichnet worden, der die größte Verallgemeinerung und Ausweitung auf Anwendungen mathematischer Methoden erlaubte.

Der Beweis von Archimedes verdeutlicht, dass die griechischen Mathematiker, wie J. E. Littlewood es ausdrückt, „fellows from another college“ sind und nicht Vertreter einer Disziplin, aus der sich erst viel später die mathematische Wissenschaft entwickelt hat.[1]

2 Der Ursprung der Kegelschnitte

2.1 Das delische Problem und das der doppelten Proportionalen

Im sog. delischen Problem geht es darum, zu einem gegebenen Würfel einen mit doppelt so großen Volumen zu finden.

Den Namen hat das Problem daher, dass den Deliern in einem Orakel gesagt wurde, sie müssten einen doppelt so großen Altar errichten, wenn sie von der Pest verschont werden wollten.

Einer anderen Überlieferung nach forderte Minos ein doppelt so großes Grabmal, nachdem Glaukos ein würfelförmiges mit 100ft Seitenlänge gemacht hatte.

Hippokrates (hielt sich 450 - 430 v. Chr. wahrscheinlich in Athen auf; erster Verfasser von Elementen) formuliert das Problem so:

Gegeben seien 2 Linien der Länge a und b; dann sind x und y gesucht, so dass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Setze $a = 2b$ ein; dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{2b}{x} = \frac{y}{b} \\ \Rightarrow \quad & \frac{x}{y} \cdot \frac{2b}{x} = \frac{y}{b} \cdot \frac{y}{b}, \text{ d.h. } \frac{2b}{y} = \frac{y^2}{b^2} \\ \Rightarrow \quad & 2 = \frac{y^3}{b^3}. \end{aligned}$$

Wenn also ein Würfel der Seitenlänge b gegeben ist, dann hat der der Seitenlänge y das doppelte Volumen.

Den Zusammenhang mit den Kegelschnitten sieht man so:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad &\Rightarrow \quad a \cdot y = x^2 \\ \frac{a}{x} = \frac{y}{b} \quad &\Rightarrow \quad a \cdot b = x \cdot y \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = b \cdot x, \end{aligned}$$

und je zwei dieser quadratischen Gleichungen bestimmen y, wenn wie oben $a = 2b$ eingesetzt wird.

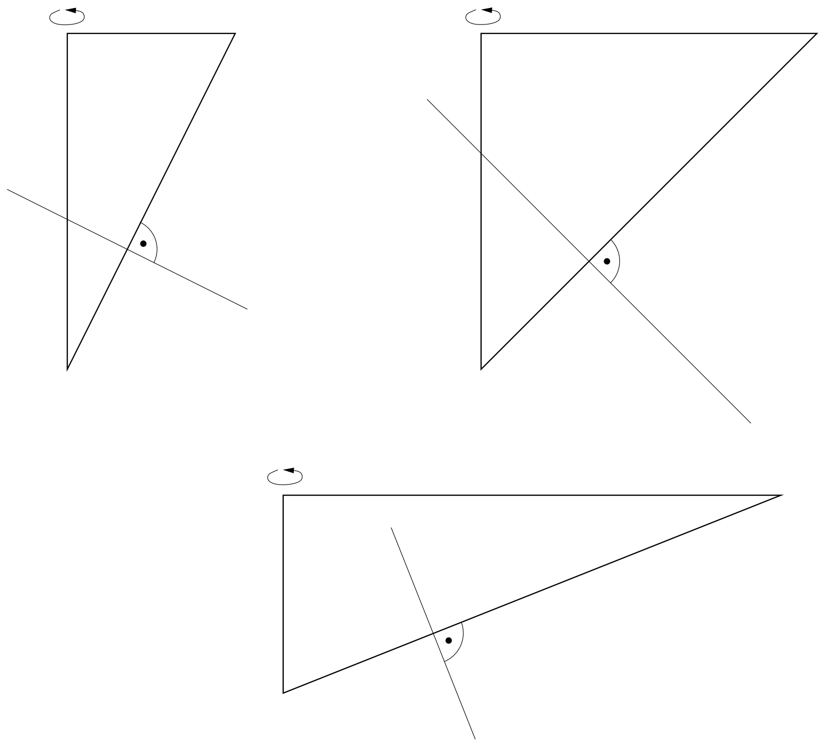
[1] Eine sehr aufschlussreiche Untersuchung von B. Artmann zeigt am Beispiel der Elemente Euklids, dass das methodische Vorgehen der griechischen Mathematiker in vielem mit dem heutigen übereinstimmt, vgl. B. Artmann, Allgemeine Phänomene mathematischen Denkens in den Elementen Euklids, Mitt. Dtsch. Math.-Ver., 15 (3), 2007, 165-172.

2.2 Die Kegelschnitte nach Menaechmus

Zunächst war bemerkt worden, dass der Schnitt einer Ebene mit einem Kreiszylinder dieselbe Kurve produzieren kann wie mit einem Kreiskegel, aber das war eine einzelne Beobachtung, die nicht zu einer systematischen Untersuchung von Schnittkurven führte.

Als erster hatte Menaechmus systematisch Kegelschnitte untersucht. Er arbeitete an der Akademie in Athen und war Zeitgenosse von Aristoteles.

Kreiskegel konstruierte er so: Ein rechtwinkliges Dreieck rotiert um einen Schenkel des rechten Winkels:



Geschnitten wird jeweils mit einer Ebene, die senkrecht zur Hypotenuse des Dreiecks steht. Das liefert in Abhängigkeit davon, ob der Winkel an der Spitze des Kegels kleiner, gleich oder größer als $90°$ ist, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Da sich auf diese Weise nie ein Kreis als Schnittfigur ergibt, ist für Menaechmus der Kreis kein Kegelschnitt. Die heute üblichen Bezeichnungen führt erst Apollonius ein. Bis hin zu Euklid und Archimedes spricht man von dem Schnitt eines spitz-, recht-, oder stumpfwinkligen Kegels.

2.3 Die Gleichung der Parabel nach Menaechmus

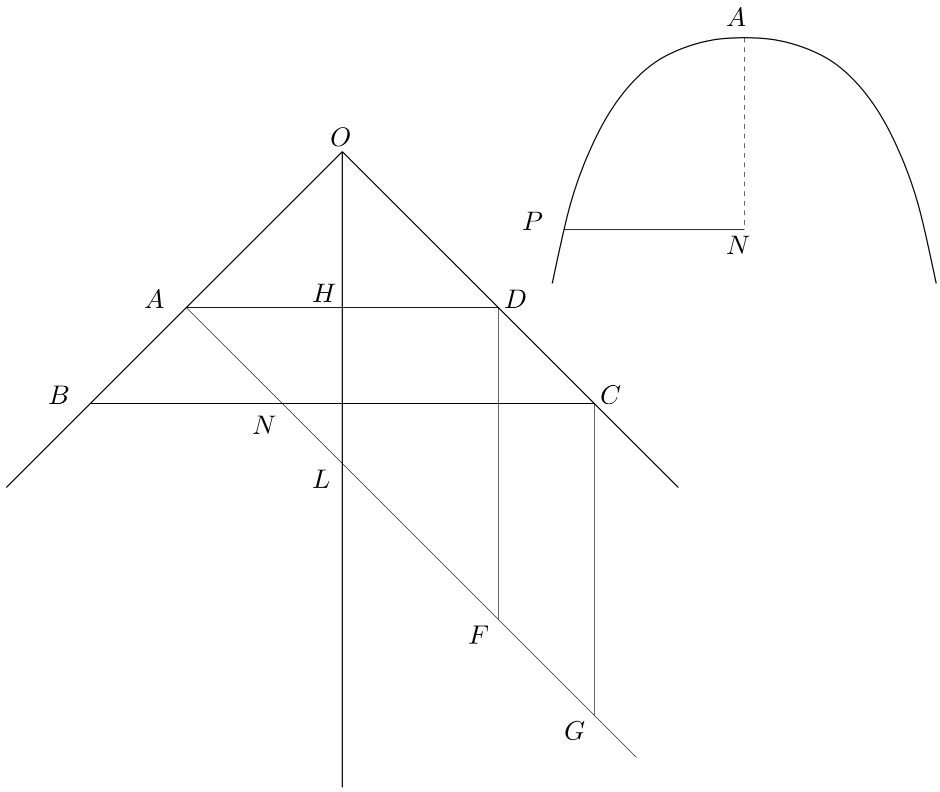
Die Ebene schneidet den Kreiskegel; dabei ist AG die Spur der Ebene. P sei ein Punkt auf der Schnittkurve, dessen Projektion N ist. A ist der Scheitel der Schnittkurve.

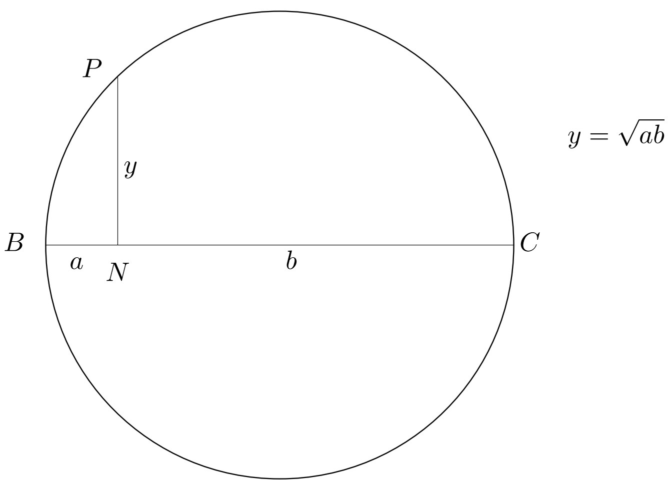
BC steht senkrecht auf der Achse des Kegels und geht durch N. DF und CG sind parallel zur Achse und treffen AL in F bzw. G.

Dann werden AD und AF durch die Achse OL halbiert. Für AD ist das klar; dann folgt $AL : AF = AH : AD$ nach dem Strahlensatz.

Setze $PN = y$ und $AN = x$; dann ist $y^2 = PN^2 = BN \cdot NC$, denn P liegt auf dem Schnitt durch den Kreiskegel (d.i. Kreis mit BC als Durchmesser) und N liegt auf dem Durchmesser. Dann ist
$\dfrac{BN}{AN} = \dfrac{NG}{NC}$ (ähnliche Dreiecke).

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad BN \cdot NC &= AN \cdot \ NG \\
&= AN \cdot \ AF, \quad \text{da } \triangle AFD = \triangle NGC, \\
&= AN \cdot 2AL, \quad \text{da } L \text{ die Strecke } AF \text{ halbiert.} \\
\Rightarrow \quad y^2 &= \quad x \cdot 2AL.
\end{aligned}
$$





3 Die Kegelschnitte des Apollonius

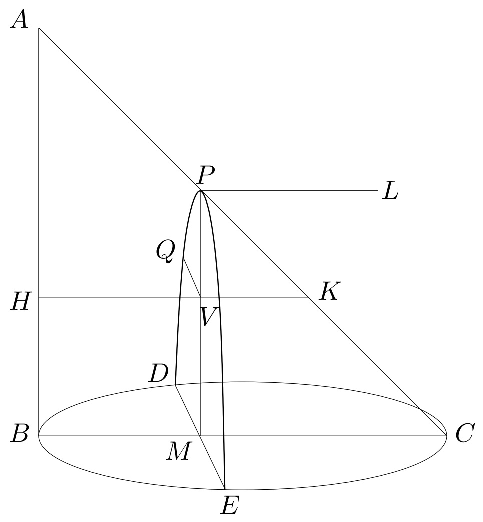
Apollonius untersucht ganz systematisch die Kegelschnitte und er setzt dabei insbesondere nicht voraus, dass der Kreiskegel gerade ist.

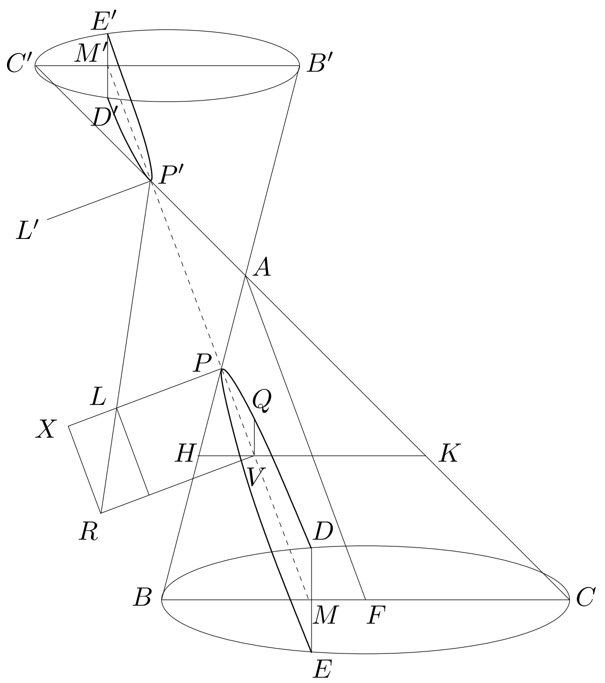
Er formuliert (bzw. interpretiert) die Gleichungen so:

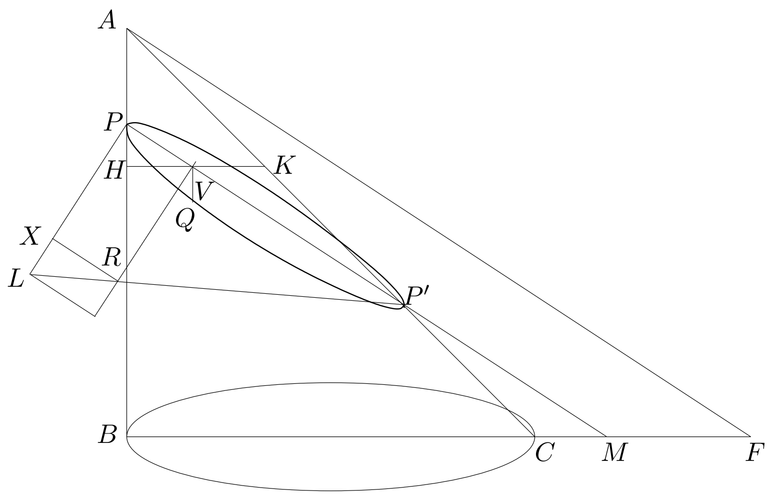
i) Parabel: Gesucht ist das Quadrat der Seitenlänge QV, so dass dessen Flächeninhalt gleich dem des Rechtecks mit den Seiten PL und PV ist.

ii) Hyperbel: Gesucht ist das Quadrat der Seitenlänge QV, so dass der Flächeninhalt gleich dem des Rechtecks mit den Seiten PV und $PL+LX$ ist.

iii) Ellipse: Gesucht ist das Quadrat der Seitenlänge QV, so dass der Flächeninhalt gleich dem des Rechtecks mit den Seiten PV und $PL - LX$ ist.







Man kann zeigen, dass die Größe LX von der Form $\frac{p}{d}x^2$ ist. Dabei sind $p = PL$ und $d =$ Durchmesser der Ellipse bzw. Hyperbel.

In moderner Schreibweise sind also die Gleichungen

$$y = px\,,$$
$$y = px + \frac{p}{d}x^2\,,$$
$$y = px - \frac{p}{d}x^2\,.$$

Um diese nun zu bezeichnen, nennt er die erste

Parabel (= Gleichnis),

die zweite

Hyperbel (= Übertreibung)

und die dritte

Ellipse (= Auslassung).

4 Parabel, Ellipse, Hyperbel als Begriff der Literatur

Apollonius hat also Begriffe für literarische Formen verwendet, die häufig in der griechischen Literatur vorkommen. Sie sind aber nicht erst viel später durch die Philologie geprägt worden, sondern wurden in der Rhetorik erarbeitet, einer Disziplin, die im 5. Jahrhundert v. Chr. entstanden ist. Das verhindert aber nicht, dass bis heute insbesondere die Parabel (und das Gleichnis) sehr häufig falsch interpretiert werden, vgl. auch Teil 4.2.

4.1 Beispiele

Hyperbel: Er platzt vor Neid. Ein Herz aus Stein. 11-Trappe-Jesech (Aachener Platt: Hat jemand schlechte Laune, unterstellt man ihm, in sein langes Gesicht passten 11 Treppen.).

Ellipse: Das finite Verb fehlt. (In der Literatur findet man bspw. bei Vergil elliptische Formulierungen; heute sind sie häufig in Überschriften von journalistischen Beiträgen anzutreffen).

Parabel: Odysseus ist stark wie ein Löwe. Das Staatsschiff lenken.

Die Parabel, allgemeiner die verschiedenen Formen von Vergleichen, Gleichnissen können auch größere literarische Formen bezeichnen. Hier sind bekannte Beispiele die Gleichnisse der Evangelien oder die Ringparabel von G. E. Lessing. In der griechischen und lateinischen Literatur häufen sich Beispiele.

Mir fällt auf, dass die Vergleiche sehr oft nicht richtig angewendet bzw. interpretiert werden. Dazu möchte ich zwei Beispiele anführen, auf die ich in den letzten Tagen gestoßen bin.

i) Claus Kleber, einer der Moderatoren des heute journals äußerte neulich, nur zwei Nationen hätten je einem ihrer Bürger die Entgegennahme des Friedensnobelpreises verwehrt: China und das Dritte Reich. Er betont, er wolle die beiden nicht vergleichen.

ii) Völkermord (in Kolonien, im Krieg) darf nicht mit dem Mord an den Juden verglichen werden.

Ziel eines Vergleichs ist es, einen Sachverhalt zu verdeutlichen, indem man ihn mit einem zweiten vergleicht, der unmittelbar einleuchtet. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

iii) Es geht um eine Frage aus der Philosophie. Heute wird vielfach versucht, die Frage nach dem Geist auf das Gehirn zu reduzieren. Dabei werden Fortschritte der Hirnforschung angeführt, die, so die Behauptung, eine mehr oder weniger vollständige Theorie des Bewusstseins liefern. Diese Behauptung kann man nun auf verschiedene Weisen in Frage stellen; eine besteht darin, die Schlussweise und insbesondere die nicht explizit genannten Voraussetzungen zu analysieren. Eine andere Entgegnung sieht so aus: Faktisch hat die Hirnforschung lediglich ermittelt, welche Hirnareale bei einfachen Bewusstseinsvorgängen aktiv sind. Daraus zu schließen, man verfüge damit über eine Theorie des Bewusstseins, kommt manchem so vor, „als würde man behaupten, die musikalischen Gedanken einer Sinfonie ließen sich erfassen, wenn man feststellt, welche Mitglieder des Orchesters, das die Sinfonie spielt, zu welchen Zeiten an ihren Instrumenten hantieren.“[2]

4.2 Beispiel für eine unangemessene Interpretation

Einen Fehler, der sehr häufig bei der Interpretation von Parabeln oder Gleichnissen gemacht wird und der dazu führt, dass man den Vergleich als unzulässig erklärt, möchte ich darstellen am Gleichnis vom Senfkorn, Mt 13, 31-32, vgl. Seite A6.

In der Bildebene geht es um das Senfkorn und die Pflanze, die daraus entsteht. Das soll in Beziehung gesetzt werden zu dem, was mit Himmelreich bezeichnet wird. Dazu ist zu bemerken, dass der Autor Matthäus als Jude den Namen Gottes nicht aussprechen darf; er steigert diese Ehrfurcht, indem er auch den Begriff „Gott“ vermeidet und stattdessen „Himmel“ sagt. Himmelreich hat also nichts mit einem Jenseits zu tun; das Reich (wörtlich: Königsherrschaft) meinte für die damaligen Menschen vor allem die Möglichkeit, in sicheren Verhältnissen zu leben, d.h. ohne Kriege und staatliche Willkür. In der Bildebene finden wir nun mehrere Sachverhalte: das Senfkorn, den Menschen, der es aussät, und die große Pflanze, die daraus entsteht. Sie ist so groß, dass die Vögel sich darauf niederlassen, wie auf einem Baum.

[2] F. von Kutschera, Philosophie des Geistes, Paderborn, 2009, S. 237

Entscheidend für die Interpretation ist nun, dass nur *eine Sache* aus der Bildebene übertragen wird, und das ist der kleine Anfang (das Senfkorn war einer der kleinsten Gegenstände, die damals bekannt waren) und das Große, das daraus wird (die Pflanze konnte bis zu drei Meter hoch werden). Das Gleichnis soll den Hörern also Mut machen, dass aus kleinen Anfängen etwas Großes wird. Es geht *nicht* darum, das Tun eines Mannes, der sät, zu übertragen, etwa dass die Hörer ihn nachahmen sollen, indem sie das Kleine nicht verachten, sondern sich darum kümmern, dass etwas Großes aus ihm wird. Diese Haltung mag durchaus richtig sein; sie ist aber nicht Gegenstand des Gleichnisses. Wenn man das Bild „Vögel des Himmels“ in die Sachebene überträgt, dann ergibt sich wahrscheinlich keine sinnvolle Aussage. Die Übertragung ist aber nicht aufgrund des Resultats unangemessen oder nicht, sie ist aus formalen Gründen falsch. Die Handlung des Mannes wird parallel beschrieben zur Handlung der Frau im Gleichnis vom Sauerteig in v. 33; es ist also lediglich eine literarische Ausschmückung. Was die Absicht des Gleichnisses angeht, so könnte sie genauso gut fehlen. (Im Übrigen sät niemand ein einzelnes Senfkorn, und schon gar nicht auf den Acker, m.a.W.: die Parallelität ist nicht gerade gut gelungen.)

Dass die Bildebene Zug um Zug übertragen wird, geschieht in der Allegorese – um die geht es hier aber nicht. Ebenso kann man bei einem Völkermord durch eine Kolonialmacht die zugrundeliegende Ideologie mit der des Dritten Reichs vergleichen, auch wenn das Ausmaß der Vernichtung ganz verschieden ist.

4.3 Vergleich bei Horaz, Epistel I.1, vv. 1-10

Wie man zwei Menschen, einen Dichter und eine Gladiator, die doch zunächst nicht miteinander verbindet, in einem Vergleich sehr eindrucksvoll in Beziehung setzen kann, möchte ich anhand der Epistel I.1, vv. 1-10 von Horaz veranschaulichen, vgl. Seite A7.

Zum Hintergrund sei bemerkt, dass Horaz durch den etwas älteren Vergil[3] mit Maecenas bekannt gemacht wurde, der ihm ein Landgut schenkte, damit der sich frei von äußeren Notwendigkeiten der Dichtung widmen konnte. Nach einiger Zeit beschließt Horaz, die „Verse und die übrigen Spielereien“ abzulegen (v. 10) und Philosoph zu werden. Er nennt sich „Epicuri de grege porcus“ – und verfasst weiterhin Schriften wie die Episteln in bestem Latein. Der Grund für seinen Entschluss ist der Mangel an Anerkennung; seine Carmina werden in Rom nicht mehr so geschätzt, wie er es sich wünscht. Und dies beschreibt er nun, indem er sich, den Dichter, mit einem Gladiator vergleicht. Er klagt Maecenas an, dass er ihn wieder in die alte Gladiatorenkaserne schicken will (v. 3), aber für Horaz ist diese Zeit vorbei. Er verweist auf den Gladiator Veianius, der nicht mehr aktiv ist und der also insbesondere nicht, wenn er glaubt, den Kampf nicht mehr gewinnen zu können, an den Rand der Arena tritt (v. 6), um seinen Herrn um die Missio (Entlassung aus dem Kampf) zu bitten. Der konnte das gewähren, nahm aber oft Rücksicht auf die Stimmung der Plebejer, die zuschauten und zu ihrer Unterhaltung die Fortsetzung des Kampfes forderten, selbst wenn dies zu schweren Verletzungen oder gar zum Tod des Unterlegenen führte. Und diese extreme Erniedrigung des Gladiators bezieht Horaz auf sich als Dichter: Genauso ist er von der Willkür des Pöbels auf den Rängen abhängig.

[3] Vergil begegnen die Aachener täglich, wenn sie den Dom passieren. Er ist nämlich in einem der Chorfenster abgebildet, aber nicht, weil er die Aeneis, das Nationalepos der Römer, geschrieben hat.

Das Ausmaß der Erniedrigung wird noch deutlicher, wenn wir sehen, welche Vorstellung er von seiner Arbeit als Dichter hatte. In dem letzten Gedicht von Buch III der Carmina preist er seine eigene Leistung: Er hat ein unvergängliches Denkmal geschaffen, höher als das königliche Grab der Pyramiden (immerhin eines der sieben Weltwunder); sein Werk wird die Zeit überdauern, und er wird nicht ganz sterben. Und zum Schluss appelliert er nicht an die kunstverständigen Römer wie Maecenas, noch geht es um eine „peer review" durch Vergil oder andere Dichter. Die Muse Melpomene selbst soll ihm den Lorbeerkranz auf sein Haupt setzen, vgl. Seite A8.

Dieses Beispiel zeigt, dass es in den ersten Zeilen der Epistel um einen einzigen Aspekt in der Bildebene und in der Sachebene geht, nämlich um die Anerkennung des Werks. Und so kann man sehr wohl einen Dichter mit einem Gladiator vergleichen. Und so ist auch heute ein Vergleich zwischen Martin Heidegger und Lukas Podolski nicht von vornherein unzulässig.

Die Dichtung des Horaz – und seine Episteln sind nicht weniger schön als die Carmina – müsste nun zumindest an einem Beispiel dargestellt werden; das kann hier nicht geschehen. Ich verweise aber auf die Horaz-Monographie[4] von Eduard Fraenkel, die, nachdem man die mitunter mühevolle Arbeit am Text mit einem wissenschaftlichen Kommentar[5] hinter sich gebracht hat, große Freunde an der Horaz-Lektüre vermittelt.

[4] E. Fraenkel, Horaz, Darmstadt, 1963 (Übersetzung von Horace, Oxford University Press, 1957)

[5] A. Kiessling, R. Heinze, Q. Horatius Flaccus, Teil I: Oden und Epoden, ^{9}1958, Teil III: Briefe, ^{7}1961, Berlin

Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαι τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν

Quadratura parabolae.[1]

Archimedes Dositheo s.

Cum audiuissem, Cononem mortuum esse, qui erga nos nullum amicitiae officium neglegebat, te autem Cononi familiarem fuisse geometriaeque esse peritum, demortui causa dolore adfecti sumus, quippe qui et amicus et in mathematicis admirabili acumine praeditus esset, suscepimus autem ad te per litteras, sicuti ad Cononem mittere constitueramus, geometricorum theorematum quoddam mittere, quod antea perspectum non erat, nunc uero a nobis perspectum est, prius per mechanica inuentum, postea autem etiam per geometrica demonstratum. eorum enim, qui antea in geometria uersati sunt, quidam[2] conati sunt scribere, fieri posse, ut spatium rectilineum inueniretur dato circulo et dato circuli segmento aequale, et deinde spatium totius[3] coni sectione rectaque comprehensum quadrare conabantur lemmata minime manifesta adsumentes; quare plerique agnouerunt, haec

1) Hic titulus ab Archimede profectus esse nequit; cfr. Eutocius ad pl. aeq. II, 8.

2) De circuli quadratura egerant praeter alios Antipho, Hippias, Hippocrates; hunc maxime significat Archimedes. adparet, Archimedem, cum haec scriberet, nondum ipsum de dimensione circuli egisse.

3) *ὅλου τοῦ κώνου τομά* uix alia esse postest quam ellipsis. sed et insolenter dictum est, et offendit, quod propter *καὶ εὐθείας* etiam de segmentis ellipsis accipiendum est; cfr. Quaest. Arch. p. 149. de conatibus ellipsim quadrandi ante Archimedem nihil notum est.

1 *Ἀρχιμηδους τετραγ.* A, liber Archimedis qui dicitur quadratura parabolae 𝔅. 3 *οὐδὲν ἐπιλείπων*] scripsi, *ετι λειπων* A, om. 𝔅. 4 *ἐν φιλίᾳ*] A, amicus 𝔅. *τὶν*] scripsi, *τινα* A𝔅, *τένη* *Torellius*. 5 *εἶμεν*] A, fore 𝔅. 6 *εἵνεκεν*] A; om. 𝔅, mg. grauiter. *καὶ*] A, om. 𝔅. 8 *τοι*] *Torellius*, om. A𝔅. 9 *ἐγνωκότες ἦμες*] *ἐγνωκότες ἦμεν* H, *εγνωκοτες ειμεν* A, consueueramus 𝔅. 11 *ἁμῶν*] *ημων* A; aliis 𝔅, mg. in alio a nobis. 12 *καὶ*] A, om. 𝔅. *ἐπιδειχθέν. τῶν*] A, demonstratis 𝔅. 13 *οὖν*] addidi, om. A𝔅. 15 *ἐὸν*] A, erat 𝔅. 16 *ταῦτα*] A, hoc 𝔅. 19 *διόπερ*] *Torellius*, *οπερ* A; quae quidem 𝔅, mg. *οπερ*.

Archimedes grüßt den Dositheos.

Da ich gehört habe, daß Konon gestorben ist, der mir immer seine herzliche Freundschaft bewiesen hat, daß du aber Konons vertrauter Freund und ein erfahrener Mathemathiker seiest, trauerte ich um den Verstorbenen als um einen Freund und einen bewundernswerten Mathematiker, und beschloß, dir die Untersuchung über ein Problem, die ich eigentlich Konon übersenden wollte, zuzustellen, ein Problem nämlich, das bisher noch nicht, jetzt aber durch mich in Angriff genommen worden ist; und zwar habe ich die Lösung des Problems zuerst durch Methoden der Mechanik gefunden, alsdann durch Methoden der reinen Geometrie. Von den Forschern, die sich früher mit Geometrie beschäftigten, versuchten einige zu zeigen, daß es möglich sei, eine geradlinig begrenzte Fläche zu konstruieren, die einem gegebenen Kreise oder einem gegebenen Kreissegment flächengleich ist. Alsdann versuchten sie das gleiche zu zeigen für ein Ellipsensegment, machten dabei aber von Hilfssätzen, deren Richtigkeit keineswegs feststeht, Gebrauch. Daher erkannten die meisten an, daß diese Probleme nicht gelöst seien. Daß aber je ein Mathematiker versucht hätte, die Fläche eines Parabelsegments zu quadrieren, wie es mir gelungen ist, ist mir nicht bekannt. Ich zeige nämlich, daß der Inhalt jedes Parabelsegments um ein Drittel größer ist als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Dabei bediente ich mich folgenden Hilfssatzes zum Beweise: Es ist möglich, ein Vielfaches der Differenz zweier gegebenen Größen zu finden, das größer ist als eine beliebige gegebene Fläche. Die früheren Geometer haben sich auch dieses Hilfssatzes bedient; denn daß der Inhalt der Kreisfläche dem Quadrat des Radius, der Inhalt der dritten Potenz des Radius proportional ist, und daß der Inhalt der Pyramide gleich dem dritten Teil des Prismas ist, das mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, haben sie unter Benutzung eben dieses Hilfssatzes bewiesen. Und daß der Inhalt des Kegels gleich dem dritten Teil des Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist, zeigte ich unter Verwendung eines ähnlichen Hilfssatzes. Es zeigt sich aber, daß jeder von diesen Sätzen ebenso zweifelsfrei ist wie die Sätze, die ohne diesen Hilfssatz bewiesen worden sind. Es genügt mir, wenn die von mir gefundenen Sätze denselben Grad der Zweifelsfreiheit besitzen. Ich habe nun die Beweise niedergeschrieben und schicke dir zunächst die auf mechanischer Grundlage, dann die auf geometrischer Grundlage aufgebauten Beweise. Vorausgeschickt sind gewisse elementare Sätze aus der Geometrie der Kegelschnitte, die zum Beweise notwendig sind. Lebe wohl.

πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν. τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶ-

ab iis inuenta non esse. segmentum autem linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum neminem ex prioribus quadrare conatum esse scimus, id quod iam a nobis inuentum est; demonstramus enim, quoduis segmentum linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum tertia parte maius esse triangulo basim eandem habenti quam segmentum et altitudinem aequalem, hoc ad demonstrationem adsumpto lemmate,[1]) spatiorum inaequalium excessum, quo maius excedat minus, sibi ipsum additum quoduis spatium datum terminatum excedere posse. hoc autem lemmate priores quoque geometrae usi sunt; nam circulos duplicem rationem habere inter se quam diametros [Eucl. XII, 2], hoc ipso lemmate usi demonstrauerunt, et sphaeras triplicem inter se rationem habere quam diametros [Eucl. XII, 18], et porro quamuis pyramidem tertiam esse partem prismatis eandem basim habentis, quam pyramis, et altitudinem aequalem [Eucl. XII, 7]; et quemuis conum tertiam esse partem cylindri eandem basim habentis, quam conus, et altitudinem aequalem [Eucl. XII, 10], demonstrabant lemma illi simile [Eucl. X, 1] adsumentes. accidit autem, ut omnia illa theoremata nullo minus eorum, quae sine hoc lemmate demonstrata sunt, certa habeantur; et satis mihi est, si ea, quae nunc edimus, ad eandem fidem perducta sunt. demonstrationes igitur eorum a nobis conscriptas mittimus, prius, quo

1) De hoc lemmate cfr. De sph. et cyl. I p. 9 not. 2, De spiral. II p. 12, 6 sqq. inter priores geometras (lin. 13) praecipue de Eudoxo cogitandum esse, adparet ex I p. 4, 5 sqq., ubi Eucl. XII, 7 et 10 ei adtribuuntur, quarum haec ope Eucl. X, 1 demonstratur, illa alio prorsus modo (u. Studien über Euklid p. 34). in Eucl. XII, 2 usurpatur X, 1, in XII, 18 neque hoc neque lemma Archimedis. cfr. Quaest. Archim. p. 150.

1 κατεγνώσθεν mg. 𝔅 (despecta sunt). δὲ ὑπ' εὐθείας] *Torellius*, om. A, autem (contentam) a 𝔅. 2 τε] addidi, om. A𝔅. καὶ] A, om. 𝔅. 3 προτέρων] scripsi, πρωτων A𝔅. 11 ἑαυτᾷ] addidi, om. A, excessum in ras. 𝔅. 15 αὐτῷ τούτῳ] scripsi, αυτῳ A, hoc 𝔅. 17 ὅτι] addidi, om. A𝔅. πυραμὶς] H, e corr. G, μυραμις A. 21 ὁμοῖον] scripsi, ομοιως A𝔅. 22 λῆμμά τι] λημματι A𝔅. 23 δὲ] *Torellius*, om. A𝔅. 24 τοῦ λήμματος] A, om. 𝔅. 25 ἀρκεῖ] scripsi, sufficit 𝔅, αρτι A. 26 τούτοις] scripsi, τουτον A𝔅, τούτων *Torellius*. ἀναγμένων] scripsi, αναγμενον A𝔅, ἀναγομένων G.

Take areas b, c, d, … such that

$$b = \tfrac{1}{3}B,$$
$$c = \tfrac{1}{3}C,$$
$$d = \tfrac{1}{3}D, \text{ and so on.}$$

Then, since $b = \tfrac{1}{3}B$,

and $B = \tfrac{1}{4}A$,

$$B + b = \tfrac{1}{3}A.$$

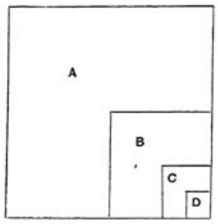
Similarly $C + c = \tfrac{1}{3}B$.

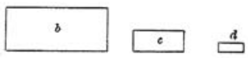
....

Therefore

$$B + C + D + \ldots + Z + b + c + d + \ldots + z = \tfrac{1}{3}(A + B + C + \ldots + Y).$$

But $b + c + d + \ldots + y = \tfrac{1}{3}(B + C + D + \ldots + Y)$.





Therefore, by subtraction,

$$B + C + D + \ldots + Z + z = \tfrac{1}{3}A$$

or $$A + B + C + \ldots + Z + \tfrac{1}{3}Z = \tfrac{4}{3}A.$$

aus T. L. Heath, The Works of Archimedes,
Cambridge Univ. Press, 1897; Dover reprint 2002

τὰ ὕστερον γενόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ I χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμάματος.

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ A, B, Γ, Δ, E τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ A, ἔστω δὲ τὸ μὲν Z τρίτον τοῦ B, τὸ δὲ H τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ I τοῦ E. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Z τοῦ B τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ B τοῦ A τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ B, Z μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ A. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ H, Γ τοῦ B καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ I, E τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν A, B, Γ, Δ. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Z, H, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν B, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ B, Γ, Δ, E, I τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ A. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ A, B, Γ, Δ, E καὶ τὸ I, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ E, τοῦ A ἐστιν ἐπίτριτα.

---

2 I] 𝔅G, ϛω̅ι̅ A. προτεθέντα] A, premissa 𝔅. 4 ἐλάσσονά] 𝔅, ελασσον A. 6 τεθέωντι] scripsi, συντεθεωντι A𝔅. 11 τετραπλασίονα] A; τετραπλάσιον 𝔅, *Nizzius*. 16 δὴ] A𝔅, fort. δὲ. 18 H, Θ, I] 𝔅G; E, Θ, Γ A. 19 Δ] *Torellius*; Δ, E A𝔅.

aequales esse spatio Θ, et triangulos in segmentis deinde ortis inscriptos aequales spatio I; omnia igitur simul spatia data aequalia erunt polygono cuidam in segmento inscripto. ergo manifestum est, minora ea esse segmento.

XXIII.

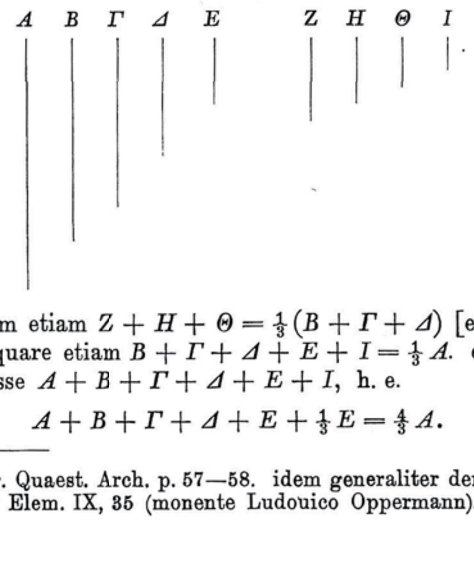
Si magnitudines quaedam ponuntur in quadrupla deinceps proportione, omnes magnitudines et praeterea tertia pars minimae simul sumptae tertia parte maiores erunt maxima.[1])

ponantur igitur deinceps quotlibet magnitudines A, B, Γ, Δ, E, singulae quadruplo maiores sequenti, et maxima sit A, sit autem $Z = \frac{1}{3} B$, $H = \frac{1}{3} \Gamma$, $\Theta = \frac{1}{3} \Delta$, $I = \frac{1}{3} E$. quoniam igitur est $Z = \frac{1}{3} B$ et $B = \frac{1}{4} A$, erit $B + Z = \frac{1}{3} A$. eadem de causa etiam

$$H + \Gamma = \tfrac{1}{3} B,\ \ \Theta + \Delta = \tfrac{1}{3} \Gamma,\ \ I + E = \tfrac{1}{3} \Delta;$$

erit igitur etiam

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \tfrac{1}{3} (A + B + \Gamma + \Delta).$$



est autem etiam $Z + H + \Theta = \frac{1}{3} (B + \Gamma + \Delta)$ [ex hypothesi]; quare etiam $B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{3} A$. ergo adparet, esse $A + B + \Gamma + \Delta + E + I$, h. e.

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \tfrac{1}{3} E = \tfrac{4}{3} A.$$

---

1) Cfr. Quaest. Arch. p. 57—58. idem generaliter demonstrat Euclides Elem. IX, 35 (monente Ludouico Oppermann).

Das Gleichnis vom Senfkorn

31 Ein anderes Gleichnis legte er
ihnen vor und sprach: „Das Himmel-
reich ist gleich einem Senfkorn, das
einer nahm und in seinen Acker säte.
32 Das ist zwar das kleinste von allen
Samenkörnern. Wenn es aber aus-
gewachsen ist, ist es größer als die
Gartengewächse und wird zu einem
Baum, so daß die Vögel des Himmels
kommen und in seinen Zweigen
wohnen.“

Das Gleichnis vom Sauerteig

33 Ein weiteres Gleichnis sagte er ihnen: „Das Himmelreich ist gleich einem Sauerteig, den eine Frau nahm und unter drei Maß Mehl mischte, bis das Ganze durchsäuert war.“

Q. HORATI FLACCI

EPISTVLARVM

LIBER PRIMVS

I

PRIMA dicte mihi, summa dicende Camena,
spectatum satis et donatum iam rude quaeris,
Maecenas, iterum antiquo me includere ludo.
non eadem est aetas, non mens. Veianius armis
Herculis ad postem fixis latet abditus agro,
ne populum extrema totiens exoret harena.
est mihi purgatam crebro qui personet aurem
'solve senescentem mature sanus equum, ne
peccet ad extremum ridendus et ilia ducat.'
nunc itaque et versus et cetera ludicra pono;
quid verum atque decens, curo et rogo et omnis in hoc sum;
condo et compono quae mox depromere possim.
ac ne forte roges quo me duce, quo lare tuter,
nullius addictus iurare in verba magistri,
quo me cumque rapit tempestas, deferor hospes.
nunc agilis fio et mersor civilibus undis,
virtutis verae custos rigidusque satelles;
nunc in Aristippi furtim praecepta relabor,

a = *aEM*] I 3 inducere $\delta^1\pi$ 6 nec *E* exoret *aEM*π *et pro var. lect.* $\phi\psi$: exornet $\delta\phi\psi$ 14 addictus **B** : adductus **a**δ^2

Q. Horati Flacci, Opera, ed. by E. C. Wickham & H. W. Garrod, Oxford Univ. Press, 1963

Fortuna saevo laeta negotio et
ludum insolentem ludere pertinax
transmutat incertos honores,
nunc mihi, nunc alii benigna.

laudo manentem; si celeris quatit
pennas, resigno quae dedit et mea
virtute me involvo probamque
pauperiem sine dote quaero.

non est meum, si mugiat Africis
malus procellis, ad miseras preces
decurrere et votis pacisci
ne Cypriae Tyriaeque merces

addant avaro divitias mari.
tunc me biremis praesidio scaphae
tutum per Aegaeos tumultus
aura feret geminusque Pollux.

XXX

Exegi monumentum aere perennius
regalique situ pyramidum altius,
quod non imber edax, non Aquilo impotens
possit diruere aut innumerabilis
annorum series et fuga temporum.
non omnis moriar, multaque pars mei
vitabit Libitinam: usque ego postera
crescam laude recens, dum Capitolium
scandet cum tacita virgine pontifex.
dicar, qua violens obstrepit Aufidus
et qua pauper aquae Daunus agrestium
regnavit populorum, ex humili potens
princeps Aeolium carmen ad Italos
deduxisse modos. sume superbiam
quaesitam meritis et mihi Delphica
lauro cinge volens, Melpomene, comam.

α = *aBC*] 57 africus $\alpha\delta^1$ 60 Cypriae Syriaeque δ 62 tum β
XXX 11 danus π 12 regnator δπ

Q. Horati Flacci, Opera, 1963

Reports des Instituts für Mathematik der RWTH-Aachen

[1] Bemelmans J.: *Die Vorlesung "Figur und Rotation der Himmelskörper" von F. Hausdorff, WS 1895/96, Universität Leipzig*, S 20, März 2005

[2] Wagner A.: *Optimal Shape Problems for Eigenvalues*, S 30, März 2005

[3] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal representation of surfaces, and Plateau's problem for Cartan functionals*, S 43, Juli 2005

[4] Reiter P.: *All curves in a C^1-neighbourhood of a given embedded curve are isotopic*, S 8, Oktober 2005

[5] Maier-Paape S., Mischaikow K. and Wanner T.: *Structure of the Attractor of the Cahn-Hilliard Equation*, S 68, Oktober 2005

[6] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *On rectifiable curves with L^p bounds on global curvature: Self–avoidance, regularity, and minimizing knots*, S 35, Dezember 2005

[7] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for weighted Sobolev constants*, S 23, Dezember 2005

[8] Bandle C. and Wagner A.: *Sobolev Constants in Disconnected Domains*, S 9, Januar 2006

[9] McKenna P.J. and Reichel W.: *A priori bounds for semilinear equations and a new class of critical exponents for Lipschitz domains*, S 25, Mai 2006

[10] Bandle C., Below J. v. and Reichel W.: *Positivity and anti-maximum principles for elliptic operators with mixed boundary conditions*, S 32, Mai 2006

[11] Kyed M.: *Travelling Wave Solutions of the Heat Equation in Three Dimensional Cylinders with Non-Linear Dissipation on the Boundary*, S 24, Juli 2006

[12] Blatt S. and Reiter P.: *Does Finite Knot Energy Lead To Differentiability?*, S 30, September 2006

[13] Grunau H.-C., Ould Ahmedou M. and Reichel W.: *The Paneitz equation in hyperbolic space*, S 22, September 2006

[14] Maier-Paape S., Miller U.,Mischaikow K. and Wanner T.: *Rigorous Numerics for the Cahn-Hilliard Equation on the Unit Square*, S 67, Oktober 2006

[15] von der Mosel H. and Winklmann S.: *On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds*, S 43, November 2006

[16] Hildebrandt S., Maddocks J. H. and von der Mosel H.: *Obstacle problems for elastic rods*, S 21, Januar 2007

[17] Galdi P. Giovanni: *Some Mathematical Properties of the Steady-State Navier-Stokes Problem Past a Three-Dimensional Obstacle*, S 86, Mai 2007

[18] Winter N.: *$W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations*, S 34, July 2007

[19] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *A geometric curvature double integral of Menger type for space curves*, S 20, September 2007

[20] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for an energy functional with mass constraint revisited*, S 20, März 2008

[21] Reiter P., Felix D., von der Mosel H. and Alt W.: *Energetics and dynamics of global integrals modeling interaction between stiff filaments*, S 38, April 2008

[22] Belloni M. and Wagner A.: *The ∞ Eigenvalue Problem from a Variational Point of View*, S 18, Mai 2008

[23] Galdi P. Giovanni and Kyed M.: *Steady Flow of a Navier-Stokes Liquid Past an Elastic Body*, S 28, Mai 2008

[24] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal mapping of multiply connected Riemann domains by a variational approach*, S 50, Juli 2008

[25] Blatt S.: *On the Blow-Up Limit for the Radially Symmetric Willmore Flow*, S 23, Juli 2008

[26] Müller F. and Schikorra A.: *Boundary regularity via Uhlenbeck-Rivière decomposition*, S 20, Juli 2008

[27] Blatt S.: *A Lower Bound for the Gromov Distortion of Knotted Submanifolds*, S 26, August 2008

[28] Blatt S.: *Chord-Arc Constants for Submanifolds of Arbitrary Codimension*, S 35, November 2008

[29] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *Regularizing and self-avoidance effects of integral Menger curvature*, S 33, November 2008

[30] Gerlach H. and von der Mosel H.: *Yin-Yang-Kurven lösen ein Packungsproblem*, S 4, Dezember 2008

[31] Buttazzo G. and Wagner A.: *On some Rescaled Shape Optimization Problems*, S 17, März 2009

[32] Gerlach H. and von der Mosel H.: *What are the longest ropes on the unit sphere?*, S 50, März 2009

[33] Schikorra A.: *A Remark on Gauge Transformations and the Moving Frame Method*, S 17, Juni 2009

[34] Blatt S.: *Note on Continuously Differentiable Isotopies*, S 18, August 2009

[35] Knappmann K.: *Die zweite Gebietsvariation für die gebeulte Platte*, S 29, Oktober 2009

[36] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Integral Menger curvature for surfaces*, S 64, November 2009

[37] Maier-Paape S., Imkeller P.: *Investor Psychology Models*, S 30, November 2009

[38] Scholtes S.: *Elastic Catenoids*, S 23, Dezember 2009

[39] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *On the Steady Motion of an Elastic Body Moving Freely in a Navier-Stokes Liquid under the Action of a Constant Body Force*, S 67, Dezember 2009

[40] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Past a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 25, Dezember 2009

[41] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Around a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 15, Dezember 2009

[42] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *Fluid Flows Around Floating Bodies, I: The Hydrostatic Case*, S 19, Dezember 2009

[43] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres*, S 91, März 2010

[44] Gerlach H. and von der Mosel H.: *On sphere-filling ropes*, S 15, März 2010

[45] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Tangent-point self-avoidance energies for curves*, S 23, Juni 2010

[46] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres (short)*, S 36, Juni 2010

[47] Schikorra A.: *A Note on Regularity for the n-dimensional H-System assuming logarithmic higher Integrability*, S 30, Dezember 2010

[48] Bemelmans J.: *Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur*, S 14, Januar 2011