RWTH AACHEN
RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Institut für Mathematik

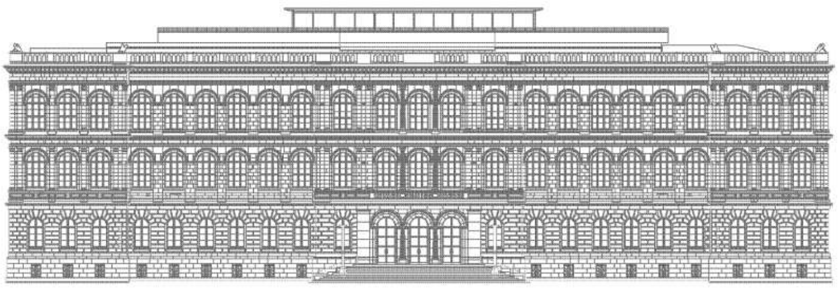
Optimale Kurven – über die Anfänge der Variationsrechnung

by

J. Bemelmans

Report No. **69** 2013

December 2013



Institute for Mathematics, RWTH Aachen University

Templergraben 55, D-52062 Aachen
Germany

Optimale Kurven – über die Anfänge der Variationsrechnung

Vortrag auf dem AbsolventenTag 2013 der Fachgruppe Mathematik der RWTH Aachen

J. Bemelmans
Institut für Mathematik
25. November 2013

Heute feiern wir den Erfolg der Absolventen unserer Fachgruppe: Sie haben das Mathematik- Studium mit den Examina zum Bachelor oder Master, dem Ersten Staatsexamen für das Lehramt oder der Promotion abgeschlossen. Dazu gratuliere ich Ihnen sehr herzlich! Die Fachgruppe Mathematik wird Ihnen die Zeugnisse in dieser Feierstunde überreichen, und darüber freue ich mich sehr. Mein Zeugnis habe ich damals im Sekretariat abgeholt, wie es der Vorstellung der 70er Jahre entsprach. Ob ich den festlichen Rahmen vermisst habe, weiß ich nicht mehr, aber ich bin sicher, daß meine Mutter sich sehr gefreut hätte, an einer solchen Feier teilzunehmen. Daher gratuliere ich den Eltern der Absolventen besonders herzlich: Sie haben einen sehr großen Anteil an dem Erfolg Ihrer Kinder, und darauf können Sie stolz sein.
Wenn ich nun über die Entstehung der Variationsrechnung, einer Disziplin der Mathematik spreche, dann muß ich zuerst bedenken, an wen sich meine Ausführungen richten sollen, denn davon hängt ab, was ich an Kenntnissen voraussetzen kann. Natürlich sollen in erster Linie die Eltern die Adressaten sein, und damit muß ich wohl von folgenden Gegebenheiten ausgehen: Die wenigsten von Ihnen befassen sich im Beruf oder in der Freizeit mit mathematischen Relationen, schon gar nicht mit Differentialgleichnungen, und ein großer Teil von Ihnen denkt bei dem Begriff „Optimale Kurven“ an alles Mögliche, nur nicht an Mathematik. Und vielleicht halten Sie Mathematiker für etwas weltfremd, wenn diesen bei dem Wort „Kurven“ zuerst Gegenstände der Mathematik einfallen. Daher zeige ich Ihnen zuerst, daß nicht alle Mathematiker so denken, und selbst wenn sie sogar in ihrer freien Zeit nicht von mathematischen Kurven lassen können, dann kann das Ergebnis sehr interessant sein.

1 Einige Kurven, auch aus der Mathematik

Zunächst möchte ich Ihnen Alexander von Brill (1842 – 1935) vorstellen, Professor der Mathematik an der Universität Tübingen, der vor allem auf dem Gebiet der Algebraischen Geometrie gearbeitet hat.

In der Lehre war ihm besonders wichtig, mit Hilfe von Modellen aus Gips oder Holz den Studenten die geometrischen Eigenschaften der algebraischen Kurven und Flächen zu veranschaulichen. Noch heute gibt es viele dieser Modelle, die im Verlag seines Bruders Ludwig Brill hergestellt wurden.

In seiner Freizeit hat Alexander von Brill u.a. Möbel gebaut, und ein Schrank von 1894 steht heute im Wohnzimmer der Familie einer Urenkelin[1] von Brill.

Dort sehen wir zunächst Brill, der – wie Atlas die Weltkugel – eine Platte trägt, auf der ein Würfel und eine Kugel liegen. Die Sphäre, d.i. die Oberfläche der Kugel, hat in allen Punkten die gleiche Krümmung, nämlich $1/R^2$ wobei R der Radius der Sphäre ist. Die Seiten des Würfels sind eben, also haben sie die Krümmung $K = 0$. Wir haben also Flächen mit konstanter Krümmung vor uns, wobei die Krümmung positiv oder Null ist.

Nun waren 1868 Flächen konstanter negativer Krümmung gefunden worden, die Pseudosphären genannt werden. Auf ihnen gilt eine Geometrie, die unserer Vorstellung von der Geometrie in der Ebene völlig widerspricht: Zu einer „Geraden“, das ist hier eine Linie, die zwischen zwei Punkten die kürzeste Verbindung realisiert, und einem Punkt, der nicht auf ihr liegt, gibt es mehr als eine Parallele. Die Frage, ob es zu einer Geraden nur eine Parallele gibt, hat die Geometer seit der Antike beschäftigt, und erst im 19. Jahrhundert wurde sie umfassend beantwortet. Daß mehr als eine Parallele existiert, ist charakteristisch für die hyperbolische Geometrie. Und eine solche Fläche mit einigen „Geraden“ auf ihr hat Alexander von Brill im oberen Teil der Schranktüre dargestellt. Wir sehen hier, daß ein Mathematiker, selbst wenn er einen Schrank baut, immer noch die Faszination vermittelt, die die Mathematik auf ihn ausübt.

[1] Ich danke Andrea und Lutz Krings für die Fotos.

Nun zu anderen Kurven. In einer Tageszeitung[2] las ich die Überschrift:

Die ideale Verbindung zwischen zwei Punkten ist nicht die Gerade

und ich kenne mehr als einen Kollegen, der auch ohne das Bild zu sehen, zuerst an Kurven der folgenden Art denkt:

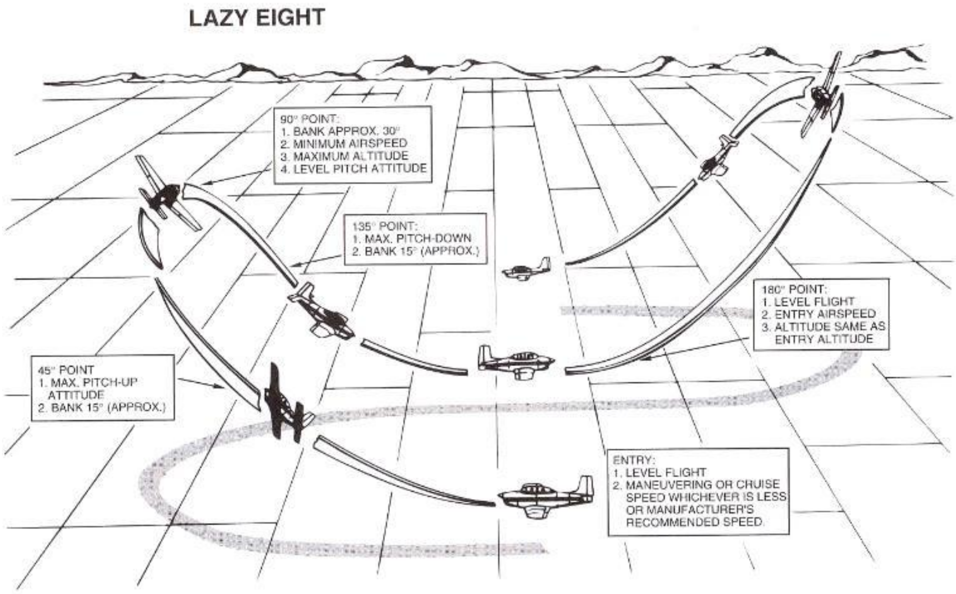
Vermutlich hat auch der eine oder die andere hier in der Aula seine Freude am Fahren auf solchen Strecken. Ich weiß nicht, wo dieses Bild aufgenommen wurde. Anders ist es bei der nächsten Kurve, die für eine der schönsten gehalten wird und sogar einen Namen hat:

Spa-Francorchamps

Eau Rouge, benannt nach dem Bach in der Nähe, der sehr eisen- und mineralhaltiges Wassser führt.

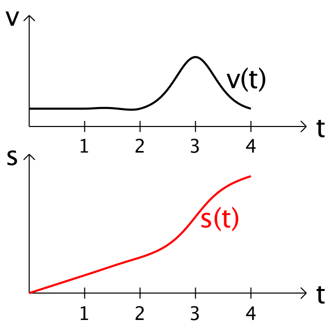
[2] FAZ, 4. Juni 2013, Seite T4

Für alle, denen das Fahren auf solchen Straßen zu gefährlich erscheint, zeige ich eine Kurve aus der Fliegerei. Dort geht es ja weniger gefährlich zu, und so sagt denn auch ein alter Pilotenspruch, der gefährlichste Teil eines Fluges sei die Fahrt zum Flugplatz. Flugzeuge fliegen die meiste Zeit geradeaus, aber um das zu trainieren, fliegen die Piloten auch solche Kurven wie die Lazy Eight: Es ist fast eine Acht, und bis der Pilot dieses Manöver so gut beherrscht, daß er nicht viel arbeiten muß (lazy), hat er alle Hände und Füße voll zu tun.



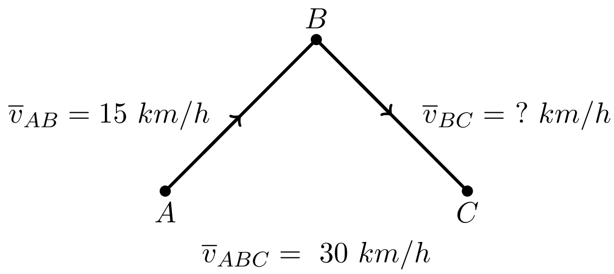
Lazy eight.

Diese Beispiele, insbesondere der Geradeausflug eines Flugzeugs, bringen uns nun direkt zu mathematischen Relationen und deren Veranschaulichung durch Kurven. Es geht nämlich um die Geschwindigkeit, deren Änderung und die Strecke, die in einem Zeitraum zurückgelegt wird.



Wir beginnen mit einer Darstellung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, d.h. zu jedem Zeitpunkt t ist angegeben, wie groß die Geschwindigkeit ist; dabei nehmen wir an, daß sich ein Flugzeug oder Auto auf einer geraden Linie bewegt, es also keine Richtungsänderung gibt. Die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Stecke entspricht dann dem Flächeninhalt unter der Kurve v bis zum Wert t; v ist zunächst konstant, also ist bis $t = 1$ der Flächeninhalt eines Rechtecks zu bestimmen, und der wird größer proportional zur Höhe $v(t)$ des Rechtecks: die Höhe $v(t)$ gibt also an, wie steil $s(t)$ wächst. Wir können also sagen, daß alle Information über die Funktion $s(t)$ in $v(t)$ enhalten ist: $v(t)$ ist ja die Änderungsrate der Größe $s(t)$.

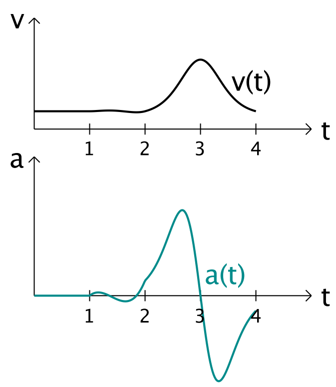
Mit Änderungsraten zu argumentieren, kann aber leicht zu falschen Aussagen führen, wie folgendes Beispiel zeigt[1].



Sie fahren von A nach B einen Kilometer bergauf mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $\overline{v}_{AB} = 15km/h$; danach fahren Sie einen Kilometer von B nach C bergab. Wie schnell müssen Sie im Durchschnitt bergab fahren, damit die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}_{ABC}$ für den gesamten Weg von A über B nach C 30 Stundenkilometer beträgt?
Als ich bei der Vorbereitung des Vortrags diese Frage hier in der Hochschule stellte, erhielt ich meistens die Antwort $45km/h$ – da ja der Mittelwert von 15 und 45 gerade 30 sei. Fragen wir also etwas genauer: Wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte, zwei Kilometer lange Strecke $30km/h$ beträgt, dauert die Fahrt von A bis C $\frac{2km}{30km/h}$, also 2/30 Stunden, das sind 4 Minuten. Wenn man nun den ersten Kilometer von A bis B mit $15km/h$ zurücklegt, ist man 1/15 Stunde unterwegs, das sind ebenfalls 4 Minuten – und folglich wird man dann C nie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $30km/h$ erreichen können. Die Geschwindigkeit ist eine Änderungsrate, aber pro Zeit, daher lautet die richtige Formel

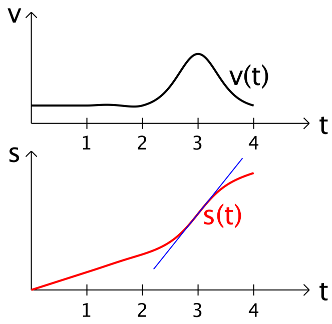
$$\frac{2}{\overline{v}_{ABC}} = \frac{1}{\overline{v}_{AB}} + \frac{1}{\overline{v}_{BC}}$$

Analog zur Änderung der zurückgelegten Strecke pro Zeit können wir nun die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit betrachten, die Beschleunigung $a(t)$. Offensichtlich wird zum Zeitpunkt $t = 3$ die Geschwindigkeit maximal; links von $t = 3$ steigt die Kurve an, und für $t > 3$ fällt sie ab. Dieses Verhalten drückt sich in dem Bild für die Beschleunigung $a(t)$ so aus, daß a links von $t = 3$ positiv ist, im Punkt $t = 3$ durch Null geht und für $t > 3$ zunächst negative Werte annimmt.



[1] Diese Frage wurde Albert Einstein von einem Psychologieprofessor gestellt, und wie es seine Art war, hat er sie geduldig beantwortet.

Im Bild von $s(t)$ ist die Steigung von $s(t)$ für $t < 3$ größer und für $t > 3$ kleiner als im Punkt $t = 3$. Weil die Kurve $s(t)$ für $t < 3$ nach links und für $t > 3$ nach rechts gekrümmt ist, nennen wir den Punkt, in dem sich dieses Krümmungsverhalten ändert, einen Wendepunkt.



Umgangssprachlich kommt dieser Zusammenhang weniger klar zum Ausdruck. Was kleiner wird, ist die Änderung(!) der Geschwindigkeit, d.h. es wird weniger stark beschleunigt; niemand stellt sich dabei vor, das Fahrzeug würde nun rückwärts fahren. Und so ist es auch, wenn wir etwa hören, die Neuverschuldung sei zurückgegangen – das bedeutet nur, daß es nun langsamer ins Elend geht, und wenn der Zuwachs an Arbeitslosen geringer wird, dann kann die Anzahl der Arbeitslosen weiterhin steigen. Es ist für jeden von Ihnen sicher leicht, Politiker zu finden (vor allem in den Parteien, die Sie nicht wählen), die mit diesen Zusammenhängen ihre Schwierigleiten haben. Ein besonders raffiniertes Beispiel stammt von dem früheren Präsidenten der USA, Richard Nixon:

Mathematics Is an Edifice, Not a Toolbox
In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection[2].

Wenn er sagt „The rate of increase of inflation is decreasing“, dann müssen wir bedenken, daß die Inflation selber eine Änderungsrate ist. Wenn also die 3. Ableitung, d.i. die Änderungsrate dritter Stufe der Preise fällt, dann steigen die Preise nach wie vor immer stärker, d.h. die Inflation wächst. Die Wähler haben womöglich nur die beiden letzten Worte aufgenommen, nämlich „inflation“ und „decreasing“ – und waren dann überzeugt, daß sie bald mehr für ihr Geld bekommen.
Die Beschleunigung ist die Größe, die wir beim Fahren oder Fliegen verändern können, und die zurückgelegte Wegstrecke ist die Größe , die uns interessiert, also hängt $s(t)$ von $a(t)$ ab, und wenn wir bedenken, daß die Beschleunigung, die zum Zeitpunkt t möglich (oder besser: sinnvoll) ist, von der Geschwindigkeit $v(t)$ abhängt, dann ist offensichtlich, daß $s(t)$ von $a(t)$ und $v(t)$ abhängt. Drücken wir nun die Änderungsrate einer Funktion $c(t)$ durch $c'(t)$ aus, dann ist $v(t) = s'(t)$ und $a(t) = v'(t) = s''(t)$, und damit können wir den Zusammenhang, daß s von s' und s'' abhängt, so schreiben: $s(t) = f(s'(t); s''(t))$, und das ist eine Differentialgleichung; f gibt dabei an, wie die Abhängigkeit vorgegeben ist.

[2] Notices AMS 43 (1996) p. 1108

2 Das Minimuumproblem von Johann Bernoulli

Im Juni 1696 veröffentlicht Johann Bernoulli, Mathematiker an der Universität Groningen, die folgende Aufgabe:

1.

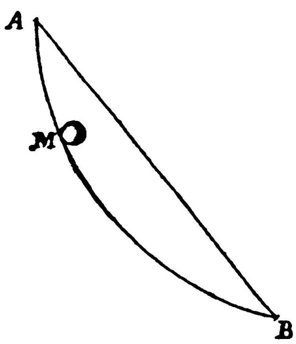
Einladung zur Lösung eines neuen Problems.

Aus den Acta Eruditorum, Leipzig, Juni 1696. S. 269.

Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.

Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosse Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte, die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat.

Es war damals üblich, daß ein Wissenschaftler, der eine interessante Aufgabe gelöst hatte, zunächst in einer Zeitschrift nur das Problem vorstellte, als Herausforderung an die Kollegen; erst später wurde dann die Lösung publiziert. Es geht darum, zu zwei Punkten A und B (in der Ebene) eine Verbindungslinie zu finden, so daß eine Kugel, die reibungsfrei auf der Kurve rollen kann, unter dem Einfluß der Schwerkraft in kürzester Zeit von A nach B gelangt.



Bernoulli bemerkt ausdrücklich, daß die geradlinige Verbindung von A nach B nicht die schnellste Verbindung liefert, daß aber andererseits die gesuchte Kurve bestens bekannt ist. (Damit ist insbesondere klar, daß Bernoulli das Problem gelöst hat.)

Neben dieser öffentlichen Ankündigung teilt er das Problem einzelnen Mathematikern per Brief mit, so schreibt er am 9. Juni 1696 an Leibniz.

9. Juni 1696 →

← 16. Juni 1696

Johann Bernoulli | Gottfried Wilhelm Leibniz

In diesem Brief schlägt er etwas andere Töne an und beklagt sich, daß die Helden aus Frankreich und England nur unter sich Probleme und Lösungen austauschen. Leibniz antwortet bereits nach 7 Tagen (von Groningen ging der Brief mit der Postkutsche nach Hannover), wobei er seine eigene Lösung mitteilt und Bernoulli darin bestärkt, ein außerordentlich schönes Problem vorgeschlagen zu haben: wie der Apfel die Eva angezogen habe, so sei er von dieser Fragestellung fasziniert! Dann diskutiert er mit Bernoulli, wie die Kurve heißen solle: Brachistochrone (Kurve kürzester Zeit) war der Vorschlag von Bernoulli,[3] während Leibniz den Namen Tachistoptote (Kurve schnellsten Falls) bevorzugte.[4] Das war nicht das erste Mal, daß die beiden sich über die beste Bezeichnungsweise austauschten; Johann Bernoulli benutzte als erster das Wort Integral und sprach von Interalrechnung, während Leibniz den Begriff Summationsrechnung bevorzugte. Sie einigten sich schließlich auf „Integral", aber das Integralzeichen $\int$ ist ein langgezogenes S und weist auf die Bezeichnungsweise von Leibniz hin.

Leibniz macht dann ebenfalls Reklame für das Problem und teilt es Jacob Bernoulli, dem älteren Bruder von Johann mit, der an der Universität Basel arbeitet.

13. September 1696 →

← 6. Oktober 1696

Gottfried Wilhelm Leibniz | Jakob I. Bernoulli

Auch der antwortet relativ schnell und teilt seine Lösung Leibniz mit.

[3] $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ ist eine Steigerungsform von $\beta\rho\alpha\chi\acute{\upsilon}\varsigma$ – kurz; $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ – Zeit

[4] $\tau\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ ist eine Steigerungsform von $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\varsigma$ – schnell; $\pi\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota\nu$ – fallen

Johann Bernoulli kündigt am 1. Januar 1697 sein Problem nochmals an, jetzt in einer ziemlich bombastischen Form:

2.

Ankündigung,

herausgegeben Gröningen, Januar 1697.

> Die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises grüsst Johann Bernoulli, öffentlicher Professor der Mathematik.
>
> Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlegt, durch deren Lösung sie einen berühmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffte ich den Dank der mathematischen Welt zu bedienen, wenn ich nach dem Beispiele von Männern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor mir dasselbe thaten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Prüfsteine, die Güte ihrer Methoden beurtheilen, ihre Kräfte erproben und, wenn sie etwas fänden, mir mittheilen könnten; dann würde einem jeden öffentlich sein verdientes Lob von mir zu Theil geworden sein.

Man beachte insbesondere den letzten Satz: Bernoulli ist nun der Schiedsrichter, der bestimmt, wer gut ist und wer nicht. Leibniz gibt schließlich an, wer denn seiner Meinung nach das Problem lösen könne, und ich werde nun zu den einzelnen Namen etwas sagen.

Johann Bernoulli

G. W. Leibniz

Jacob Bernoulli

G.F. de l'Hospital

J. Hudde

C. Huygens

I. Newton

E. W. Tschirnhaus

Beginnen wir mit Ehrenfried Walter von Tschirnhaus: Er hatte in Leiden studiert, der besten Universität auf dem Kontinent, wenn es um die neue Infinitesimalmathematik ging. Ihm gelang eine Lösunug, die in den Acta Eruditorum veröffentlicht wurde. Leibniz und Tschirnhaus waren seit langem befreundet, aber er stand nicht auf der Liste, wahrscheinlich weil Leibniz ihm eine Lösung gar nicht zutraute.

Die Lösung von Johann Bernoulli werde ich später genauer vorstellen, da sie m. E. die schönste ist. Von Leibniz habe ich schon berichtet, daß er eine Lösung gefunden hat, also komme ich zu Jacob Bernoulli.
Er war 13 Jahre älter als sein Bruder Johann, und die beiden waren seit langem zerstritten. In seiner Arbeit, die die Lösung enthält, erklärt er zunächst, daß ihn die Einladung seines Bruders – er nennt sie provocatio – überhaupt nicht interessiere. Aber als der berühmte Leibniz ihm das Problem mitgeteilt habe, da mußte er sich damit befassen, und so lieferte er ebenfalls eine Lösung.

Seinem Bruder, der ihn ja, wie bereits gesagt, überhaupt nicht interessierte, legt er zwei neue Probleme vor, und das drückt er sogar im Titel seiner Arbeit aus:

Lösung der Aufgaben meines Bruders..., dem ich dafür eine andere vorlege

G.F. de l'Hospital ist allen Hörern der Analysis-Vorlesungen bekannt von der de l'Hospitalschen Regel.

Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital (1661 – 1704)

In einem Mathematik-Lexikon[3] las ich, er habe eine Korrespondenz mit Jacob Bernoulli begonnen, die dann in dem ersten Lehrbuch der Infinitesimalrechnung gipfelte. In einfacheren Worten kann man das viellecht so sagen: de l'Hospital gehörte dem Hochadel an und konnte es sich leisten, Jacob Bernoulli als seinen Privat-Lehrer anzustellen. Zudem mußte er ihm als erstem jedes neue Problem mitteilen – ebenfalls gegen Bezahlung. Was Bernoulli dann für de l'Hospital verfasste, bildete die Grundlage für sein Lehrbuch. Den Zeitgenossen waren diese Vereinbarungen übrigens nicht bekannt.

Bei Johan Hudde hatte Leibniz eine Einschränkung gemacht: Er könne das Problem sicherlich lösen, wenn er denn neben seinen beruflichen Verpflichtungen die nötige Zeit fände.

Johan van Waveren Hudde (1628 – 1704)

Hudde hatte ebenfalls in Leiden Mathematik studiert und wichtige Beiträge zur Infinitesimalmathematik geliefert, war aber dann, da er einer alteingesessenen Amsterdamer Kaufmannsfamilie angehörte, Unternehmer und langjähriger Bürgermeister von Amsterdam geworden; er gab dieses Amt nach mehr als 30 Jahren auf, weil eine erneute Wiederwahl gesetzlich ausgeschlossen war. Ferner war er an der Leitung der Ostindien-Kompanie beteiligt.

[3] Lexikon der Mathematik, Spectrum-Verlag, 2002

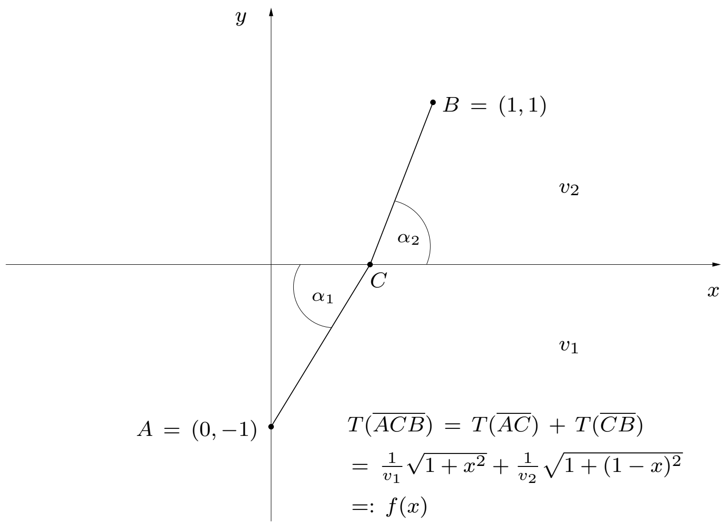
Hudde befasste sich weiterhin mit Mathemtik, aber nur, wenn sie im Zusammenhang mit seinem Beruf auftrat, wie etwa bei der Berechnung von Pensionsrückstellungen, wo ihm seine Kenntnisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie zugutekamen.[5] Zu Newton und Huygens sage ich später etwas, als nächstes möchte ich die Lösung von Johann Bernoulli vorstellen.

3 Die Lösung von Johann Bernoulli

Was ist die Schwierigkeit bei der Bestimmung der Brachistochrone? Wenn wir eine Verbindungslinie zwischen A und B fixieren, dann können wir die Zeit messen, die die Kugel braucht, um längs dieser Linie von A nach B zu gelangen. Das bedeutet aber, daß wir für jede Kurve eine einzige reele Zahl kennen. Die Kurve selbst aber kann nur durch eine Vorschrift beschrieben werden, die jeden einzelnen ihrer Punkte festlegt. Also besteht die erste Aufgabe darin, ein solches Gesetz zu finden.
Ausgangspunkt der Überlegungen ist das Brechungsgesetz von Willebrord Snell (1580 - 1626): Ein Lichtstrahl wird an der Trennungslinie zwischen zwei optischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex gebrochen, und es gilt

$$n_1 \cos \alpha_1 = n_2 \cos \alpha_2$$

wobei n_1 und n_2 die Brechungsindizes der optischen Medien sind und α_1 bzw. α_2 die Winkel sind, die der Strahl mit der Geraden bildet, die die Medien voneinander trennt. Diesem Gesetz gab der Mathematiker Pierre de Fermat (1607 – 1665) eine ganz andere Interpretation: Das Licht wird so gebrochen, daß der Lichtstrahl, ausgehend von A den Punkt B in kürzester Zeit erreicht; dabei wird vorausgesetzt, daß die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Medien verschieden ist. In der Zeichnung sieht man, daß der Weg, den das Licht in dem Medium unterhalb der Achse zurücklegt, länger ist, da hier die Lichtgeschwindigkeit größer ist.



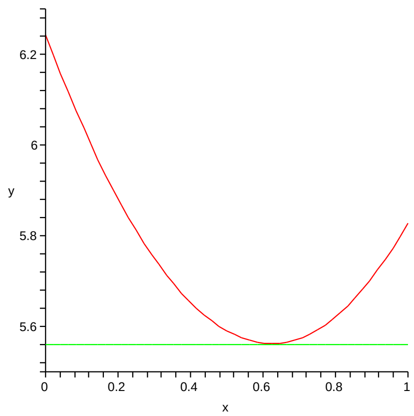
Wenn wir nun den optimalen Lichtweg bestimmen wollen, dann ist der Punkt C, in dem die Trennlinie durchstoßen wird, die einzige Unbekannte, da ja in

[5] Man kann bedauern, daß er sich als ausgewiesener Wissenschaftler der Politik verschrieb; es ist aber zu bedenken, daß anderenfalls nur noch die für die Politik übrigbleiben würden, die für andere Tätigkeiten ungeeignet sind.

jedem Medium der Lichtweg geradlinig ist. Wenn C die Koordinaten $(x, 0)$ hat, dann ist die für den Weg ACB benötigte Zeit gerade die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{1+(1-x)^2},$$

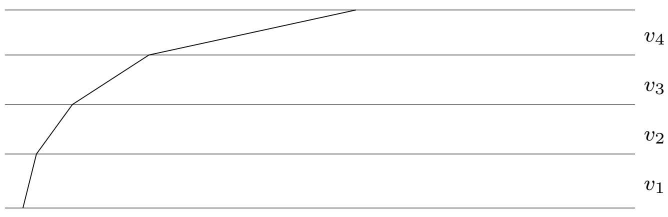
die offensichtlich in einem einzigen Punkt minimal wird.



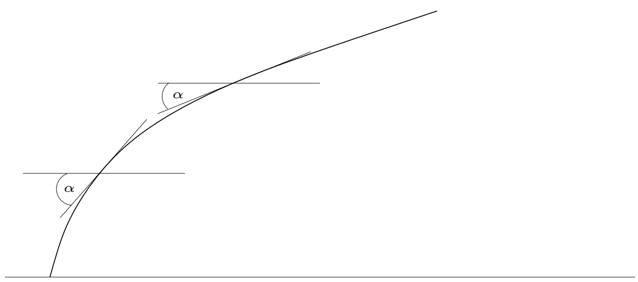
Nach den Regeln der Differentialrechnung folgt dann:

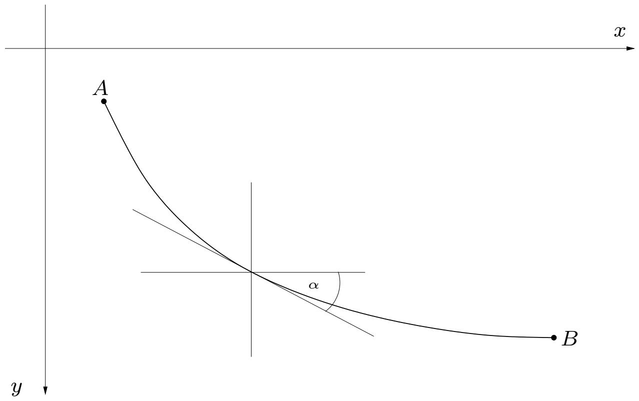
$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} f'(x) &= \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \\ &= \frac{\cos(\alpha_1)}{v_1} - \frac{\cos(\alpha_2)}{v_2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Gesetz von Snell, jetzt mit der Größe $1/v_1$ anstelle von n_1, bzw. $1/v_2$ anstelle von n_2.
Wenn wir nun ein optisches Medium annehmen, das aus Schichten besteht, in denen die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, dann ergibt sich für den Lichtweg ein Streckenzug, bzw. eine glatte Kurve, wenn die Dicke der Schichten immer kleiner wird.



$$\frac{\cos(\alpha)}{v} = \text{const}$$





$$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{y}} = \text{const}$$

Die Kurve ist also dadurch charakterisiert, daß der Steigungswinkel im Punkt y proportional zur Geschwindigkeit ist. Diesen Sachverhalt überträgt Bernoulli auf die Brachistochrone: Da die Kugel reibungsfrei rollt, ist die Geschwindigkeit

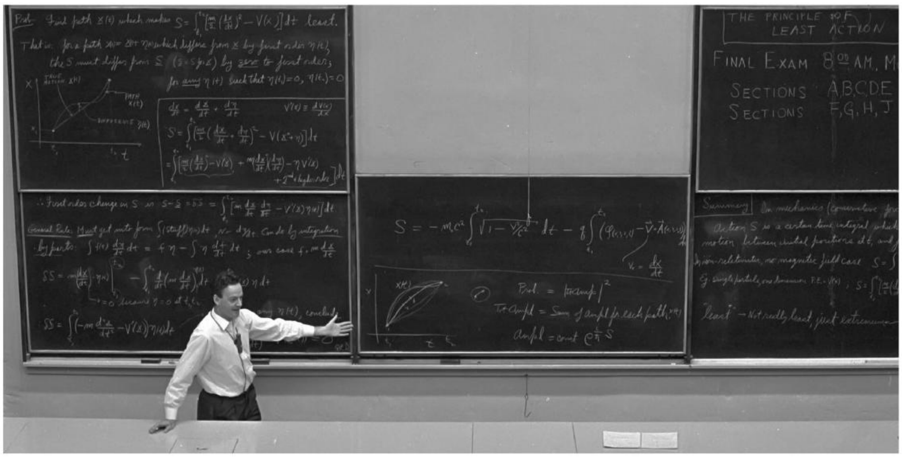
$$v(y) = \sqrt{2gy},$$

wobei g die Gravitationskonstante ist. Also erhalten wir die Differentialgleichung

$$\cos \alpha(y)/\sqrt{2gy} = \text{const}.$$

Die Lösung dieser Gleichung war den Mathematikern bestens bekannt, wie Bernoulli in seiner ersten Ankündigung bereits bemerkt hatte. Bevor ich die Lösung angebe, möchte ich das Vorgehen erläutern. Fermat hatte eine Minimalaufgabe ins Spiel gebracht, um ein bekanntes physikalisches Gesetz zu interpretieren oder in einen neuen Zusammenhang zu stellen. Dieses Ergebnis greift Bernoulli auf und wendet es auf ein ganz anderes Problem an (Was hat die Geometrische Optik mit der Bewegung im Schwerefeld zu tun?) und stellt insbesondere die Art der Argumentation auf den Kopf: Fermat erklärt eine Differentialgleichung durch ein Minimalproblem, und Bernoulli findet zu einer Minimumaufgabe die Differentialgleichung, die die Lösung beschreibt. Eine solche Vorgehensweise ist ganz typisch für die Mathematik, und es ist zum einen von philosophischem Interesse (was hier nicht ausgeführt werden soll), zum anderen aber von großer Bedeutung für die Anwendbarkeit der Mathematik.
Aufgrund der Anwendbarkeit von Methoden in ganz unterschiedlichem Zusammenhang sind Absolventen der Mathematik in den verschiedensten Bereichen einsetzbar. Wem das übertrieben vorkommt, der möge die Berufsaussichten der Mathematiker vergleichen mit einem der wöchentlich neu eingerichteten Studiengänge, die durch eine möglichst eng beschriebene Ausbildung gute Berufsaussichten suggerieren wollen.
Ferner ist die Darstellung des Brechungsgesetzes durch eine Minimumaufgabe erst der Anfang von einer sehr umfangreichen Theorie. Die Physik ist schließlich nicht die Summe aller Gesetze, die in einer Formelsammlung aufgeführt sind, vielmehr geht es um allgemeine Prinzipien, aus denen die einzelnen Gesetze folgen, und dabei spielen die Variationsprinzipe, von denen wir ein ganz einfaches Beispiel gesehen haben, eine große Rolle. Die Bewegungen in der Mechanik etwa sind dadurch charakterisiert, daß eine bestimmte Größe, die die Energie enthält, minimal wird.

Für Leibniz und viel Physiker nach ihm waren diese Zusammenhänge so beeindruckend, daß sie behaupteten, in der besten aller möglichen Welten zu leben, da in der unseren diese Prinzipien gelten. Heute denken die meisten sicher nicht so, aber die Faszination, die diese Prinzipien ausüben, ist ungebrochen.

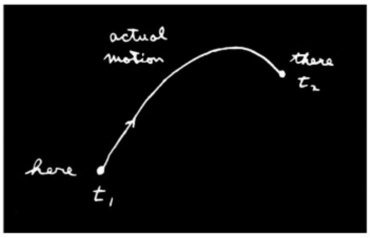


Ein Physiker soll hier as Beispiel genannt werden: Richard Feynman. Er war nicht nur einer der bedeutendsten Physiker seiner Zeit, sondern hat auch in der Lehre seine Begeisterung für die Physik auf beeindruckend Weise vermittelt. In den 60er Jahren hat er eine neue Anfänger-Vorlesung konzipiert, die heute noch nachgedruckt wird, und da fällt die 19. Vorlesung in Band III völlig aus dem Rahmen: Auf die für damalige Verhältnisse aufwendige graphische Gestaltung wird verzichtet, wir sehen Fotos der Tafeln, und seine Vorlesung wird wörtlich wiedergegeben[4]. Er betont, daß es nicht um Prüfungsstoff geht – stattdessen zeigt er, was ihn an der Physik fasziniert, und das sind die Variationsprinzipe, auf die ihn schon sein Lehrer auf der Highschool hingewiesen hat. Und dasselbe Thema wählt er auch für seine Vorlesung, die er anläßlich der Verleihung des Nobelpreises gehalten hat.

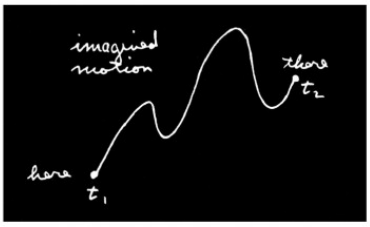
19-1 A special lecture—almost verbatim*

"When I was in high school, my physics teacher—whose name was Mr. Bader—called me down one day after physics class and said, 'You look bored; I want to tell you something interesting.' Then he told me something which I found absolutely fascinating, and have, since then, always found fascinating. Every time the subject comes up, I work on it. In fact, when I began to prepare this lecture I found myself making more analyses on the thing. Instead of worrying about the lecture, I got involved in a new problem. The subject is this—the principle of least action.

"Mr. Bader told me the following: Suppose you have a particle (in a gravitational field, for instance) which starts somewhere and moves to some other point by free motion—you throw it, and it goes up and comes down.



It goes from the original place to the final place in a certain amount of time. Now, you try a different motion. Suppose that to get from here to there, it went like this



but got there in just the same amount of time. Then he said this: If you calculate the kinetic energy at every moment on the path, take away the potential energy, and integrate it over the time during the whole path, you'll find that the number you'll get is *bigger* than that for the actual motion.

"In other words, the laws of Newton could be stated not in the form $F = ma$ but in the form: the average kinetic energy less the average potential energy is as little as possible for the path of an object going from one point to another.

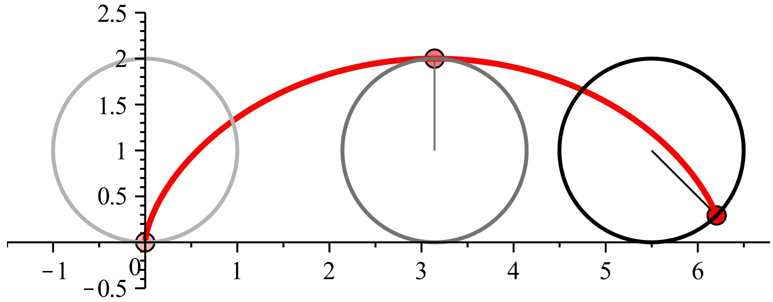
* Later chapters do not depend on the material of this special lecture—which is intended to be for "entertainment."

[4] Von seiner Vorlesung „The Motion of Planets Around the Sun“ sind sogar Tonbänder erhalten, vgl. D.L. Goodstein & J.R. Goodstein (Hg.), Feynman's Lost Lecture, New York, 1996 (Buch und CD)

Nun wollen wir die Kurve kennenlernen, die die Gleichung

$$\cos\alpha(y)/\sqrt{2gy} = \text{const.} \qquad (+)$$

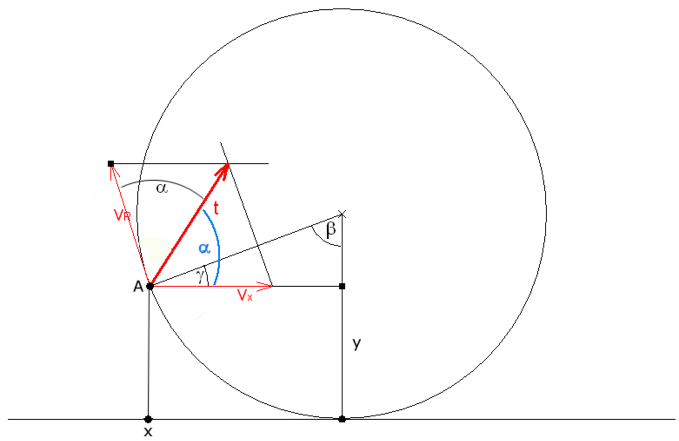
erfüllt. Seit Descartes unterscheidet man zwei Methoden, um Kurven zu beschreiben, einmal ist das ein algebraischer Ausdruck, dann aber eine mechanische Vorschrift, die Kurve zu produzieren. In unserem Fall ist es eine Rollkurve (Zykloide), die dadurch entsteht, daß ein Kreis auf einer Geraden abrollt: Die Kurve, auf der sich ein fester Punkt des Kreises bewegt, heißt dann Rollkurve.



Die Koodinaten des Punktes $A(\beta)$, der aus dem Berührungspunkt $A(0)$ entsteht, wenn der Kreis um den Winkel β gedreht wird, sind

$$\begin{aligned} x &= R\beta \;-\; R\sin\beta \\ y &= R \;-\; R\cos\beta = R\,(1 \;-\; \cos\beta) = 2R\sin^2(\beta/2) \end{aligned}$$

Für den Nachweis von (+) ist entscheidend, daß die Geschwindigkeit, mit der sich A in x-Richtung bewegt, dieselbe ist wie die, mit der A sich in Richtung der Kreistangenten bewegt. (Es ist hilfreich, sich vorzustellen, daß der Kreis gar nicht rollt, sondern nur in x-Richtung gezogen wird, bzw. daß er sich nur dreht, ohne eine Bewegung in x-Richtung.)



Dann ist aber die Tangente t an die Rollkurve die Summe der Vektoren v_R und v_x, also halbiert sie den Winkel zwischen v_R und v_x.

Dann folgt $\qquad 2\alpha = \pi/2 + \gamma.$

Mit $\qquad \gamma + \beta = \pi/2$

folgt $\qquad \beta = \pi - 2\alpha \quad \text{oder} \quad \beta/2 = \pi/2 - \alpha.$

Damit haben wir $\qquad \sin(\beta/2) = \cos(\alpha),$

also $\qquad \sqrt{y} = \sqrt{(2\,R)}\,\cos\alpha,$

und das bedeutet $\qquad \cos\alpha/\sqrt{y} = \text{const.},$

was zu zeigen war.

4 Der Beitrag von I. Newton

Als am 1. Januar 1697 das Problem erneut publiziert wurde, arbeitete Newton nicht mehr an der Universität Cambridge, vielmehr leitete er in London das Münzamt. Daher hatte Leibniz, als er Newton als einen der Mathematiker nannte, die die Aufgabe lösen könnten, die Einschränkung gemacht, daß er nicht wisse, ob Newton neben seiner neuen Tätigkeit noch mathematisch arbeite.

Nun wissen ziemlich genau, wie Newton seine Tage verbrachte, denn seine Nichte, die seinen Haushalt führte, hat darüber Buch geführt.

> **N. when come home from the Tower would stand still a great while if any paper or book sent him before he would eat.**

Und am 29. Januar 1697[5] traf Bernoullis Ankündigung bei ihm ein, er schreibt nämlich ein Eingangsdatum auf das Schreiben:

> **Chartam ex Gallia missam accepi Jan. 29. 169$\frac{6}{7}$.**

Und dann, so wieder seine Nichte, arbeitet er bis 4 Uhr am nächsten Morgen an der Lösung.

> **Sr I. N. was in the midst of the hurry of the great recoinage did come home from the Tower very much tired at 4 o'clock, but did not sleep till he had solved it w$^{\text{ch}}$ was by 4 in the morning.**

Das Resultat schickt er in einem anonymen Brief an Charles Montague, den Präsidenten der Royal Society, der den Brief am 30. Januar veröffentlicht.

> **Epistola missa ad prænobilem virum D. Carolum Montague ...& Societatis Regiæ Præsidem: in qua solvuntur duo problemata a Johanne Barnoullo Mathematico celeberrimo proposita**
> **30 Jan. 169$\frac{6}{7}$.**

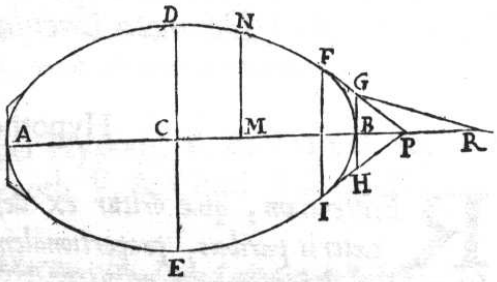
Was ist der Grund für dieses Verhalten? Im Jahre 1687 hatte Newton die Philosophiae Naturalis Principia Mathematica veröffentlicht, in denen er – was bestens bekannt ist – die Bahnen der Planeten aus dem Gravitationsgesetz hergeleitet hatte. Weniger bekannt sind die vielen anderen Probleme, die er in den Principia behandelte, und dazu gehört auch eine Minimumaufgabe, die viel schwieriger ist als das Problem der Brachistochrone:

[5] In England wurde damals der julianische Kalender verwendet, da der auf dem kontinent gebräuchliche gregorianische als päpstliche Irrlehre galt. Die Briten führten daher in allen Jahren, deren Jahreszahl durch 100 teilbar ist, einen Schalttag ein, und waren 1696 schon 11 Tage hinter unserem Kalender zurückgeblieben, ab 1700 betrug die Differenz sogar 12 Tage. Zudem begann das neue Jahr am 25. März, was zu den merkwürdigen Bezeichnungen wie 29. Januar/9. Februar und 1696/7 führte.

Man bestimme die Form eines Rotationskörpers vorgeschriebener Länge, der in einer gleichmäßigen Flüssigkeitsströmung (in Richtung seiner Achse) minimalen Widerstand hat. In der Zeichnung sehen wir zu bestimmende Kurve DNFIE. (Der Körper wird von rechts angeströmt.)

[327]

em eundem *CB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



Quod ſi figura *DNFB* ejuſmodi ſit ut, ſi ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum ſecet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad 4 *BR* x *GBq*: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta deſcribitur, in Medio raro & Elaſtico ab *A* verſus *B* velociſſime movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare. [illegible]

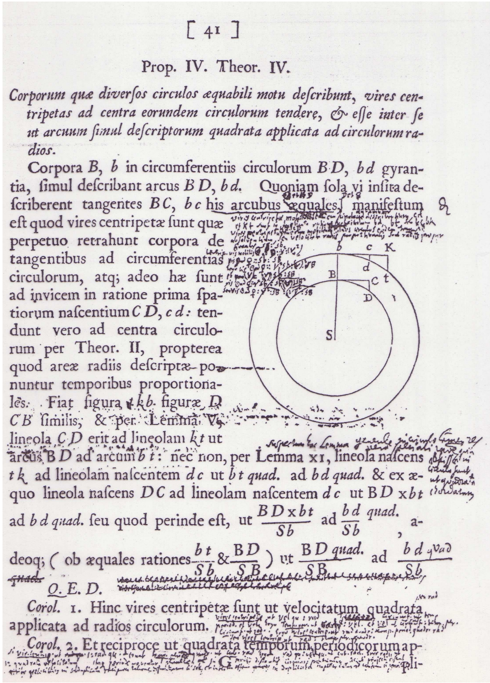
Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire reſiſtentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elaſtico velociſſime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Deſignet *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *CA* deſcriptum. Producatur *CA* primo ad *S* deinde ad *R*, ut ſit *AS* pars tertia ipſius *CA*, & *CR* ſit ad *CS* ut denſitas corporis Sphærici ad denſitatem Medii. Ad *CR* erigantur perpendicula *PC*, *RX*, centroque *R* & Aſymptotis *CR*, *RX* deſcribatur Hyperbola quævis *PVT*. In *CR* capiatur *CT* longitudinis cujuſvis, & erigatur perpendiculum *TV* abſcindens aream Hyperbolicam *PCTV*, & ſit *CZ* latus hujus areæ applicatæ ad rectam *PC*. Dico quod motus quem globus, deſcribendo ſpatium *CZ*, ex reſiſtentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum ſub initio ut longitudo *CT* ad longitudinem *CR* quamproxime. Nam

Wir sehen also, daß Newton nicht erst durch die Aufgabenstellung Bernoullis die neue Art von Minimumproblemen kennenlernte. Am Ende des Abschnitts ist eine Anmerkung eingetragen worden, die auf den ersten Besitzer dieses Buches hinweist.

Auf einer Reihe von weiteren Seiten finden sich z. T. sehr umfangreiche Anmerkungen,



[41]

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & eſſe inter ſe ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, ſimul deſcribant arcus *BD*, *bd*. Quoniam ſola vi inſita deſcriberent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifeſtum eſt quod vires centripetæ ſunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ ſunt ad invicem in ratione prima ſpatiorum naſcentium *CD*, *cd*: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis deſcriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* ſimilis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus *BD* ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola naſcens *tk* ad lineolam naſcentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola naſcens *DC* ad lineolam naſcentem *dc* ut $BD \times bt$ ad *bd quad.* ſeu quod perinde eſt, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd \; quad.}{Sb}$, adeoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{SB}$) ut $\frac{BD \; quad.}{SB}$ ad $\frac{bd \; quad.}{Sb}$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ ſunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum appli-

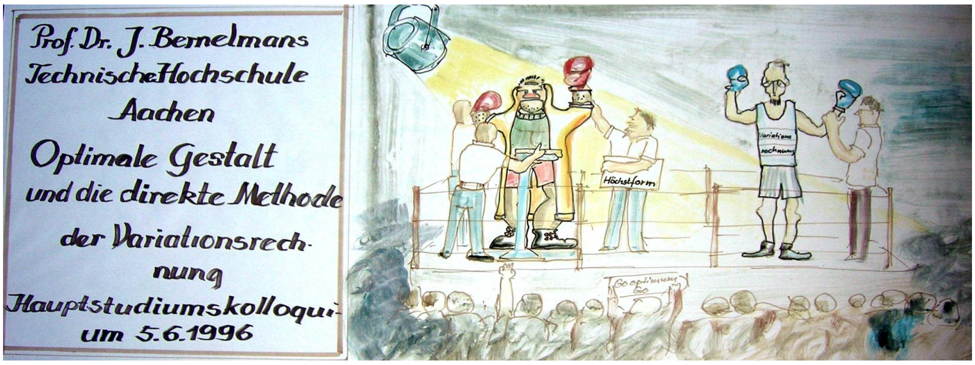
die einem Bibliothekar sicher keine Freude machen. Das war wohl auch der Grund, daß dieses Exemplar, das der Universitätsbibliothek Göttingen gehörte, verkauft wurde. Ein Sammler aus Genf hat es erworben, aber erst 1965 wurde es dem Mathematik-Historiker Emil Fellmann vorgelegt, der damals das Euler-Archiv in Basel leitete. Er erkannte sofort die Handschrift von Leibniz, und so wissen wir, daß Leibniz das frühere Minimumproblem von Newton und dessen Lösung kannte.

Christiaan Huygens
(1629 – 1695)

Bevor ich den auf den Beitrag Newtons eingehe, möchte ich den letzten Kandidaten von Leibniz erwähnen: Christiaan Huygens. Ihm traute Leibniz ebenfalls eine Lösung zu, aber Huygens war bereits 1695 verstorben. Daß die Einschätzung durch Leibniz richtig war, belegt einerseits die Tatsache, daß Huygens die Ausführungen Newtons zum Körper kleinsten Widerstands vollständig ausgearbeitet hatte. Insbesondere konnte er die Differentialgleichung herleiten, die Newton ohne jede Erläuterung angegeben hatte. Ferner hatte Huygens die Rollkurve intensiv studiert und gezeigt, daß zwei Kugeln, die in verschiedenen Punkten A und A‘ zu rollen beginnen, zur gleichen Zeit den Punkt B erreichen. Diese Eigenschaft der Rollkurve hatte er bei seinen Untersuchungen zur Pendeluhr gefunden. Wenn das Gewicht eines Pendels sich auf einer Kreislinie bewegt, hängt die Schwingungsdauer von der Auslenkung ab.

5 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, wie das Gebiet der Variationsrechnung entstanden ist, allerdings ist nicht klar, warum es so heißt. Häufig haben sich in der Mathematik Bezeichnungen durchgesetzt, die nicht nur auf den ersten Blick wenig hilfreich sind. In Darmstadt ist es üblich, daß Vorträge im Mathematischen Kolloquium mit einem Bild angekündigt wurden, mit dem der Kollege Karl H. Hoffmann das Interesse weckt. Das Thema „Optimale Gestalt und die direkte Methode der Variationsrechnung“ hat er so angekündigt:



Was sind nun Variationen, die dem Gebiet seinen Namen gegeben haben? 1755 schrieb der 19-jährige Giuseppe Ludovico Lagrangia aus Turin an Leonhard Euler, den damals führenden Mathematiker auf dem Gebiet; er beschrieb eine Methode, die es erlaubt, nur mittels einer Rechenvorschrift die Differentialgleichung zu finden, welche die Lösung festlegt. Für unseren Fall hätten wir also lediglich eine Formel für die Zeit angeben müssen, die die Kugel längs einer beliebigen Kurve von A nach B benötigt; die Herleitung der Differentialgleichung wäre dann eine leichte Folgerung der Methode von Lagrange. Kurven, die nur wenig von der Lösung abweichen, werden Variationen genannt, und daher bekam das Gebiet seinen Namen. Euler sprach in dem ersten Lehrbuch noch von der „Methode, gekrümmte Linien zu finden, die sich der Eigenschaft eines Maximums oder Minimums erfreuen“; er griff die Idee von Lagrange sofort auf und verhalf ihr zum Durchbruch.

Zum Schluß möchte ich nochmals auf den Beitrag Newtons von 1687 zurückkommen: ist 1687 schon die Variationsrechnung entstanden? Wir haben gesehen, daß er seine Lösung anonym mitgeteilt hat, und von seinem Biographen John Flamsteed nach den Gründen befragt, antwortete er:

I do not love ... To be dunned and teezed by forreigners about Mathematical things.

Wenn wir die Beiträge Newtons zum Körper kleinsten Widerstands und von Johann Bernoulli zur Brachistochrone vergleichen, dann zeigen sich folgende Unterschiede:

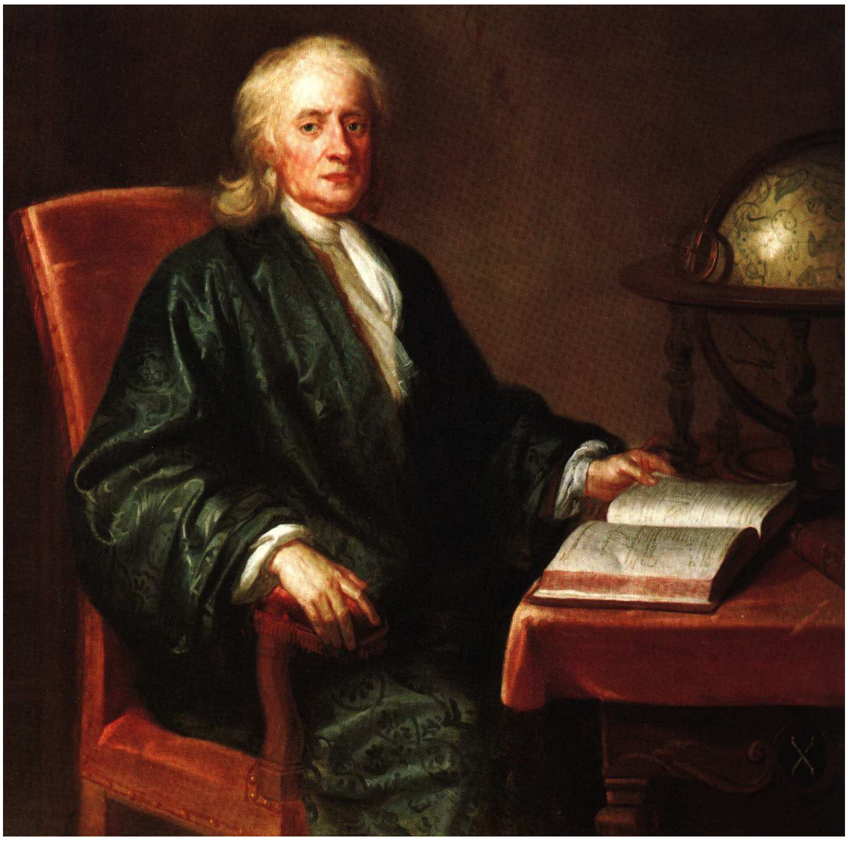
(i) Bernoulli gibt für die Differentialgleichung eine interessante Herleitung an, die Vorbild wird für das Vorgehen bei verwandten Problemen. Bei Newton hingegen finden wir nur die Differentialgleichung, aber nicht einmal einen Hinweis, wie er sie hergeleitet hat. Und nur von Huygens wissen wir, daß er die Argumente liefern konnte.

(ii) Die Differentialgleichung für die Brachistochrone konnte explizit gelöst werden, wohingegen bei der Gleichung für den Körper kleinsten Widerstands keine Lösung bekannt ist.
Damit hat Bernoulli das von ihm vorgestellte Problem vollständig gelöst, und das auf eine Weise, die andere Mathematiker angeregt hat, ähnliche Fragestellungen in Angriff zu nehmen. Newtons Problem war viel schwieriger, und daß er die zugehörige Differentialgleichung gefunden hat, können wir nur bewundern – die neue Disziplin „Variationsrechnung“ hat er damit allerdings nicht auf den Weg gebracht.

Ähnlich geht Newton auch bei seiner Behandlung der Brachistochrone vor. Weder gibt er die Differentialgleichung (+) an, noch begründet er, daß die Rollkurve eine Lösung ist. Sein Beitrag besteht darin, daß er angibt, wie man den Radius des Kreises bestimmt, so daß die zugehörige Rollkurve, wenn sie in A beginnt, durch den Punkt B geht. Jeder, der sich damit auskennt, aus einer Familie von Funktionen durch Randbedingungen eine spezielle auszusuchen, erwartet, daß hier die Familie an einer Stelle ausgewertet wird. Newton sieht das geometrische Objekt und schließt mit dem Strahlensatz auf die passende Kurve. So besteht sein ganzer Beitrag aus diesem Schluß, der keine zwei Zeilen umfaßt.

David Gregory, Professor für Astronomie in Oxford, konnte offensichtlich die bei Newton fehlenden Argumente nicht finden und bat daher Newton um Erläuterungen. Sie waren sehr ausführlich, wie wir aus dem Memorandum wissen, das Gregory verfasste. Offensichtlich war Newton dieser Schotte nicht lästig, wenn es um mathematische Dinge ging.

Abschließen möchte ich den Vortrag mit einem Bild von Newton:



Er ist über 80 Jahre alt, und wir sehen, daß das Licht nicht nur auf ihn, sondern auch auf den Globus im Hintergrund und das Buch vor ihm fällt. Es handelt sich um die 3. Auflage der Principia, aufgeschlagen auf den Seiten 204-205. Dort beweist Newton, das das Gravitationspotential einer Kugel mit konstanter Massendichte gleich dem Potential eines Punktes ist, der dieselbe Masse wie die Kugel hat. Damit rechtfertigt er, daß in der Mechanik die Himmelskörper als Punkte betrachtet werden können. Der Beweis ist alles andere als einfach, da es um ein mehrdimensionales Integral geht. Offensichtlich war Newton dieses beeindruckende Resultat immer noch so wichtig, daß es auf einem der letzten Gemälde, die es von ihm gibt, dargestellt wurde. Wir können sicher sein, daß seine Begeisterung für die Wissenschaft immer noch sehr groß ist.

Sie, die Absolventen, haben das Studium der Mathematik begonnen, weil Ihnen dieses Fach auf der Schule viel Freude gemacht hat, und ich hoffe, durch das Studium wurde diese Freude noch größer. Auf Ihren Abschluß, den wir heute feiern, können Sie sehr stolz sein, und ich wünsche Ihnen, daß Sie in Ihrem Beruf mit Begeisterung arbeiten werden und auch an den anderen Dingen, die Sie unternehmen, viel Freude haben werden.

Reports des Instituts für Mathematik der RWTH Aachen

[1] Bemelmans J.: *Die Vorlesung "Figur und Rotation der Himmelskörper" von F. Hausdorff, WS 1895/96, Universität Leipzig*, S 20, März 2005

[2] Wagner A.: *Optimal Shape Problems for Eigenvalues*, S 30, März 2005

[3] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal representation of surfaces, and Plateau's problem for Cartan functionals*, S 43, Juli 2005

[4] Reiter P.: *All curves in a C^1-neighbourhood of a given embedded curve are isotopic*, S 8, Oktober 2005

[5] Maier-Paape S., Mischaikow K. and Wanner T.: *Structure of the Attractor of the Cahn-Hilliard Equation*, S 68, Oktober 2005

[6] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *On rectifiable curves with L^p bounds on global curvature: Self–avoidance, regularity, and minimizing knots*, S 35, Dezember 2005

[7] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for weighted Sobolev constants*, S 23, Dezember 2005

[8] Bandle C. and Wagner A.: *Sobolev Constants in Disconnected Domains*, S 9, Januar 2006

[9] McKenna P.J. and Reichel W.: *A priori bounds for semilinear equations and a new class of critical exponents for Lipschitz domains*, S 25, Mai 2006

[10] Bandle C., Below J. v. and Reichel W.: *Positivity and anti-maximum principles for elliptic operators with mixed boundary conditions*, S 32, Mai 2006

[11] Kyed M.: *Travelling Wave Solutions of the Heat Equation in Three Dimensional Cylinders with Non-Linear Dissipation on the Boundary*, S 24, Juli 2006

[12] Blatt S. and Reiter P.: *Does Finite Knot Energy Lead To Differentiability?*, S 30, September 2006

[13] Grunau H.-C., Ould Ahmedou M. and Reichel W.: *The Paneitz equation in hyperbolic space*, S 22, September 2006

[14] Maier-Paape S., Miller U.,Mischaikow K. and Wanner T.: *Rigorous Numerics for the Cahn-Hilliard Equation on the Unit Square*, S 67, Oktober 2006

[15] von der Mosel H. and Winklmann S.: *On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds*, S 43, November 2006

[16] Hildebrandt S., Maddocks J. H. and von der Mosel H.: *Obstacle problems for elastic rods*, S 21, Januar 2007

[17] Galdi P. Giovanni: *Some Mathematical Properties of the Steady-State Navier-Stokes Problem Past a Three-Dimensional Obstacle*, S 86, Mai 2007

[18] Winter N.: *$W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations*, S 34, Juli 2007

[19] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *A geometric curvature double integral of Menger type for space curves*, S 20, September 2007

[20] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for an energy functional with mass constraint revisited*, S 20, März 2008

[21] Reiter P., Felix D., von der Mosel H. and Alt W.: *Energetics and dynamics of global integrals modeling interaction between stiff filaments*, S 38, April 2008

[22] Belloni M. and Wagner A.: *The ∞ Eigenvalue Problem from a Variational Point of View*, S 18, Mai 2008

[23] Galdi P. Giovanni and Kyed M.: *Steady Flow of a Navier-Stokes Liquid Past an Elastic Body*, S 28, Mai 2008

[24] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal mapping of multiply connected Riemann domains by a variational approach*, S 50, Juli 2008

[25] Blatt S.: *On the Blow-Up Limit for the Radially Symmetric Willmore Flow*, S 23, Juli 2008

[26] Müller F. and Schikorra A.: *Boundary regularity via Uhlenbeck-Rivière decomposition*, S 20, Juli 2008

[27] Blatt S.: *A Lower Bound for the Gromov Distortion of Knotted Submanifolds*, S 26, August 2008

[28] Blatt S.: *Chord-Arc Constants for Submanifolds of Arbitrary Codimension*, S 35, November 2008

[29] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *Regularizing and self-avoidance effects of integral Menger curvature*, S 33, November 2008

[30] Gerlach H. and von der Mosel H.: *Yin-Yang-Kurven lösen ein Packungsproblem*, S 4, Dezember 2008

[31] Buttazzo G. and Wagner A.: *On some Rescaled Shape Optimization Problems*, S 17, März 2009

[32] Gerlach H. and von der Mosel H.: *What are the longest ropes on the unit sphere?*, S 50, März 2009

[33] Schikorra A.: *A Remark on Gauge Transformations and the Moving Frame Method*, S 17, Juni 2009

[34] Blatt S.: *Note on Continuously Differentiable Isotopies*, S 18, August 2009

[35] Knappmann K.: *Die zweite Gebietsvariation für die gebeulte Platte*, S 29, Oktober 2009

[36] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Integral Menger curvature for surfaces*, S 64, November 2009

[37] Maier-Paape S., Imkeller P.: *Investor Psychology Models*, S 30, November 2009

[38] Scholtes S.: *Elastic Catenoids*, S 23, Dezember 2009

[39] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *On the Steady Motion of an Elastic Body Moving Freely in a Navier-Stokes Liquid under the Action of a Constant Body Force*, S 67, Dezember 2009

[40] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Past a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 25, Dezember 2009

[41] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Around a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 15, Dezember 2009

[42] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *Fluid Flows Around Floating Bodies, I: The Hydrostatic Case*, S 19, Dezember 2009

[43] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres*, S 91, März 2010

[44] Gerlach H. and von der Mosel H.: *On sphere-filling ropes*, S 15, März 2010

[45] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Tangent-point self-avoidance energies for curves*, S 23, Juni 2010

[46] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres (short)*, S 36, Juni 2010

[47] Schikorra A.: *A Note on Regularity for the n-dimensional H-System assuming logarithmic higher Integrability*, S 30, Dezember 2010

[48] Bemelmans J.: *Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur*, S 14, Januar 2011

[49] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Tangent-point repulsive potentials for a class of non-smooth m-dimensional sets in $\mathbb{R}^n$. Part I: Smoothing and self-avoidance effects*, S 47, Februar 2011

[50] Scholtes S.: *For which positive p is the integral Menger curvature $\mathcal{M}_p$ finite for all simple polygons*, S 9, November 2011

[51] Bemelmans J., Galdi G. P. and Kyed M.: *Fluid Flows Around Rigid Bodies, I: The Hydrostatic Case*, S 32, Dezember 2011

[52] Scholtes S.: *Tangency properties of sets with finite geometric curvature energies*, S 39, Februar 2012

[53] Scholtes S.: *A characterisation of inner product spaces by the maximal circumradius of spheres*, S 8, Februar 2012

[54] Kolasiński S., Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Characterizing $W^{2,p}$ submanifolds by p-integrability of global curvatures*, S 44, März 2012

[55] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *On the Steady Motion of a Coupled System Solid-Liquid*, S 95, April 2012

[56] Deipenbrock M.: *On the existence of a drag minimizing shape in an incompressible fluid*, S 23, Mai 2012

[57] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *On some knot energies involving Menger curvature*, S 30, September 2012

[58] Overath P. and von der Mosel H.: *Plateau's problem in Finsler 3-space*, S 42, September 2012

[59] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Menger curvature as a knot energy*, S 41, Januar 2013

[60] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *How averaged Menger curvatures control regularity and topology of curves and surfaces*, S 13, Februar 2013

[61] Hafizogullari Y., Maier-Paape S. and Platen A.: *Empirical Study of the 1-2-3 Trend Indicator*, S 25, April 2013

[62] Scholtes S.: *On hypersurfaces of positive reach, alternating Steiner formulæ and Hadwiger's Problem*, S 22, April 2013

[63] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *Capillary surfaces and floating bodies*, S 16, Mai 2013

[64] Bandle, C. and Wagner A.: *Domain derivatives for energy functionals with boundary integrals; optimality and monotonicity.*, S 13, Mai 2013

[65] Bandle, C. and Wagner A.: *Second variation of domain functionals and applications to problems with Robin boundary conditions*, S 33, Mai 2013

[66] Maier-Paape, S.: *Optimal f and diversification*, S 7, Oktober 2013

[67] Maier-Paape, S.: *Existence theorems for optimal fractional trading*, S 9, Oktober 2013

[68] Scholtes, S.: *Discrete Möbius Energy*, S 11, November 2013

[69] Bemelmans, J.: *Optimale Kurven – über die Anfänge der Variationsrechnung*, S 22, Dezember 2013