RWTH AACHEN
RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Institut für Mathematik

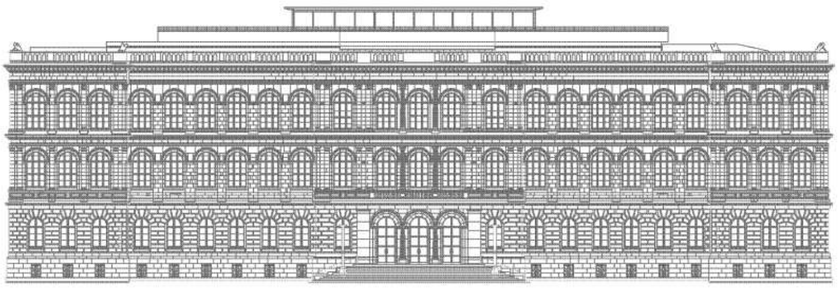
Über den Einfluß der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene auf die Reine Mathematik und die These von Wigner

by

J. Bemelmans

Report No. **75** 2014

September 2014



Institute for Mathematics, RWTH Aachen University

Templergraben 55, D-52062 Aachen
Germany

Über den Einfluß der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene auf die Reine Mathematik und die These von Wigner

J. Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen University

22. September 2014

Zusammenfassung

Für die Mathematik ist es ganz charakteristisch, daß ein Theorem, in dem die Lösung eines bestimmten Problems formuliert wird, später als Hilfsmittel in dem Beweis einer anderen Aussage verwendet wird; dabei kann das neue Problem einem ganz anderen Teilgebiet der Mathematik angehören. Dieses Phänomen hat B. Artmann bereits in den Elementen Euklids gefunden, und davon ausgehend zeigen wir als erstes, daß Archimedes eine geometrische Aufgabe löst, indem er das Hebelgesetz der Mechanik verwendet. Wir führen dann weitere Beispiele an, die zeigen, daß Ergebnisse über Gleichungen, die physikalische Prozesse beschreiben, sowohl Resultate der Reinen Mathematik liefern als auch zu neuen Teilgebieten der Reinen Mathematik führen können. Dies widerspricht offensichtlich der These von E. Wigner von der „Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences“. Wir erörtern Wigners Behauptung am Ende der Arbeit, indem wir die Voraussetzungen prüfen, die dabei gemacht wurden.

1 Einleitung

In der Arbeit [8] „Allgemeine Phänomene mathematischen Denkens in den Elementen Euklids“ stellt B. Artmann anhand von vielen Beispielen heraus, daß verschiedene Aspekte der heutigen Mathematik bereits vor mehr als 2300 Jahren, als die mathematische Wissenschaft entstand, für das mathematische Denken charakteristisch waren. Das ist umso erstaunlicher, als die damalige Mathematik inhaltlich mit der heutigen überhaupt nicht verglichen werden kann.

Zu den von Artmann herausgearbeiteten Phänomenen gehört insbesondere der „Doppelcharakter von Theoremen als Einsicht und Werkzeug“[1]; als Beispiel nennt er den Peripheriewinkelsatz (Elemente III,21) zusammen mit dem Satz vom Kreisviereck (Elemente III,22). „Nach der Konstruktion eines Umkreises zu jedem Dreieck stellt sich die entsprechende inhaltliche Frage, welche Vierecke denn einen Umkreis haben. Die Antwort gibt Satz III,22: *In jedem einem Kreis einbeschriebenen Viereck sind gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich.* Äquivalent dazu ist der Peripheriewinkelsatz III,21: *Im Kreise sind die Winkel in demselben Abschnitt einander gleich.*“ Dieser Doppelcharakter von Theoremen als Einsicht (Satz III,21) und Werkzeug (III,22 wird mittels III,21 bewiesen) umfaßt mitunter Fälle, in denen der Werkzeugcharakter sogar dominant

[1] [8 : 168f.]

ist. Als Beispiel gibt Artmann den Strahlensatz an,[2] der zunächst aussagt, daß die Gestalt durch Proportionen bestimmt wird; als Werkzeug ist er aber das vielleicht am häufigsten verwendete Hilfsmittel der klassischen Geometrie.

Während nun hier der Doppelcharakter eines Theorems innerhalb der Geometrie und auch dort bei relativ eng zusammenhängenden Fragestellungen auftritt, ändert sich dies in dem Maße, in dem die Mathematik inhaltlich wächst. Die Analytische Zahlentheorie liefert hier das klassische Beispiel: Im Primzahlsatz wird die Frage, wie sich die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $p \leq x$ für $x \to \infty$ verhält, durch die von P. L. Tschebyscheff eingeführten Größen $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ bzw. $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ und die Eulersche Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (\frac{1}{1-p^{-s}}), s > 1,$$

auf das Verhalten der Riemannschen ζ-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ zurückgeführt, wobei $\zeta(s)$ ins Komplexe fortgesetzt wird. Bei den dann zu beweisenden Abschätzungen für die Funktion $\zeta(z)$, für die es verschiedene Beweise gibt, können z. B. Theoreme der Harmonischen Analysis als Werkzeug verwandt werden.

Jeder Mathematiker kann, wie Artmann bemerkt, diese Eigenschaft der Mathematik durch Beispiele aus seinem Arbeitsgebiet verdeutlichen. Die Disziplinen, in denen ein Theorem als Einsicht bzw. Werkzeug auftrittt, können inhaltlich so weit auseinanderliegen, daß man im Prinzip für jedes Theorem aus dem einen Gebiet mit der Möglichkeit einer Anwendung in einem völlig anderen rechnen muß. So können Sätze der Harmonischen Analysis Hilfsmittel in so unterschiedlichen Bereichen wie Zahlentheorie, Komplexe Analysis, Partielle Differentialgleichungen, Funktionalanalysis oder Approximationstheorie sein.[3] Nun gibt es diesen Fall, daß das Hilfsmittel einem völlig anderen Gebiet entstammt, schon in der griechischen Mathematik; als Beispiel untersuchen wir in §2 die Integration der Parabel durch Archimedes. Das entscheidende Hilfsmittel ist das Hebelgesetz, d.h. das geometrische Problem der Flächenberechnung wird mit Hilfe eines Satzes aus der Physik gelöst.

Dieses Vorgehen entspricht überhaupt nicht der Vorstellung, daß die Reine Mathematik sich ausschließlich aus innermathematischen Fragestellungen weiterentwickelt und eine Verbindung mit der Beschreibung der realen Welt ein sekundärer – und in höchstem Maße überraschender und letztlich unverständlicher – Effekt sei. Sehr pointiert drückt das E. P. Wigner aus, wenn er von der „Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences“[4] spricht. Seine These, insbesondere die zugrundeliegende Sicht der Mathematik, erörtern wir in §5, nachdem wir zuvor eine Reihe von Beispielen vorstellen, bei denen physikalische Fragestellungen zu neuen Ergebnissen der Reinen Mathematik führten.

---

[2] [8 : 168]

[3] Resultate der Harmonischen Analysis werden besonders häufig in anderen Gebieten verwandt; die Gründe hierfür zu untersuchen, ist sicher eine interessante Aufgabe.

[4] [41]

2 Die Integration des Parabelsegments durch Archimedes

Das von Artmann bei Euklid nachgewiesene Phänomen finden wir auch bei Archimedes, der mit dem Hebelgesetz einen Flächeninhalt bestimmt. Im Vergleich zu Euklid ist das Problem, in dem das Werkzeug angewandt wird, viel weiter entfernt von dem Bereich, dem das Werkzeug entstammt. Des weiteren ist der Satz über den Flächeninhalt der Parabel ein neues Resultat, das Archimedes als erster bewiesen hat, während es bei den Elementen Euklids um die systematische Zusammmenstellung von meistens früher bewiesenen Ergebnissen geht.

Sei also das Parabelsegment $\mathcal{S}(\mathrm{AB\Gamma})$ berandet von dem Parabelbogen $\mathcal{P}(\mathrm{AB\Gamma})$ und der Strecke $\mathrm{A\Gamma}$. Der Punkt B auf dem Parabelbogen sei dadurch bestimmt, daß die Tangente an die Parabel in B parallel zu $\mathrm{A\Gamma}$ ist.

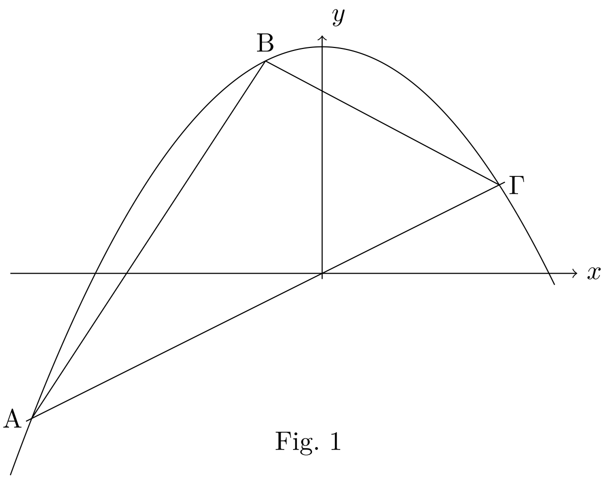


Fig. 1

Dann gilt:

$$|\mathcal{S}(\mathrm{AB\Gamma})| = \frac{4}{3} \cdot |\triangle(\mathrm{AB\Gamma})|, \tag{1}$$

wobei $\triangle(\mathrm{AB\Gamma})$ das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und Γ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $\triangle(\mathrm{AB\Gamma})$ unter allen Dreiecken über $\mathrm{A\Gamma}$, die in dem Parabelsegment liegen, dasjenige mit der größten Höhe; daher sprechen wir auch vom Höhendreieck.

Archimedes gibt drei verschiedene Begründungen für das Resultat (1).Wir werden sie der Reihe nach vorstellen, um herauszuarbeiten, daß er das Hebelgesetz nicht im Rahmen einer Plausibilitätsbetrachtung verwendet, sondern als Hilfsmittel in einem exakten Beweis. In dem ersten Nachweis[5] wird das Parabelsegment von innen und von außen durch Trapeze approximiert.

[5] [1 : Prop. 1-16]

Das Segment schneidet im Punkt Γ die waagerechte Linie g; der andere Endpunkt der Sekante AΓ liegt unterhalb von $\mathrm{K} \in g$; Δ ist der Schnittpunkt der Geraden durch K und A sowie der Tangente an die Parabel in Γ. Wenn nun AΓ durch die Punkte $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$,... in gleich lange Teile zerlegt wird und Parallelen zu KΔ durch diese Punkte gezogen werden, dann erhalten wir auf dem Parabelbogen die Schnittpunkte $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$,... Schließlich verbinden wir diese Punkte mit Γ, und so ergeben sich die einbeschriebenen Trapeze t_1, t_2, t_3,... und die umbeschriebenen Trapeze T_1, T_2, T_3,... wie in Fig. 2 für $i = 2$ dargestellt.

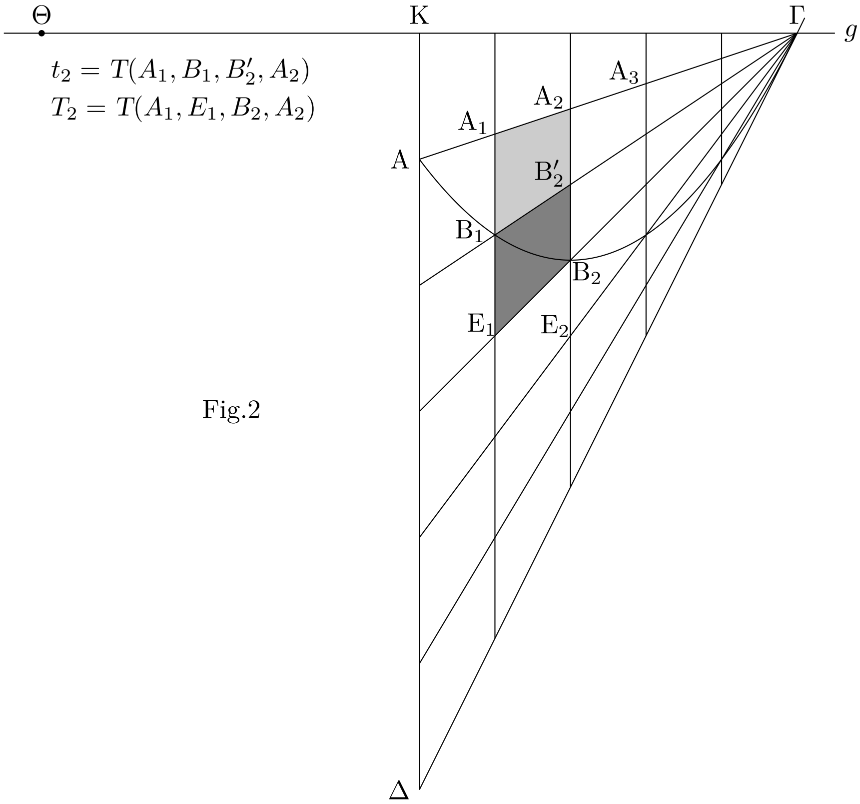


Fig.2

Archimedes zeigt nun

$$3 \cdot \Big\{ |t_1| + ... + |t_n| \Big\} < |\triangle(\mathrm{A}\Delta\Gamma)| < 3 \cdot \Big\{ |T_1| + ... + |T_n| \Big\}, \qquad (2)$$

indem er das Hebelgesetz verwendet. Dazu betrachtet er g als Waagebalken und bestimmt zu jedem Trapez und zu dem Dreieck $\triangle(\mathrm{A}\Delta\Gamma)$ ein Rechteck, so daß dieses, in Θ aufgehängt, mit t_i bzw. T_i im Gleichgewicht ist. Dabei wird angenommen, daß diese Flächen konstante Massendichte haben. Den Grenzwert in (2) für $n \to \infty$, das heißt

$$3 \cdot |\mathcal{S}(\mathrm{AB}\Gamma)| = |\triangle(\mathrm{A}\Delta\Gamma)|, \qquad (3)$$

bestimmt er, indem er ausschließt, daß $3 \cdot |\mathcal{S}(\mathrm{AB}\Gamma)|$ kleiner oder größer als $|\triangle(\mathrm{A}\Delta\Gamma)|$ ist. Mit $|\triangle(\mathrm{A}\Delta\Gamma)| = 4 \cdot |\triangle(\mathrm{AB}\Gamma)|$, was in Fig. 4 dieser Arbeit gezeigt wird, folgt dann die Behauptung (1).

In derselben Abhandlung gibt Archimedes einen weiteren Beweis,[6] der ausnutzt, daß die Seiten AB und BΓ des Höhendreiecks selbst wieder Sekanten der Parabel sind, über denen wie zuvor bei AΓ Höhendreiecke $\triangle(\mathrm{ABA}_1)$ und $\triangle(\mathrm{B\Gamma B}_1)$ errichtet werden können, usw.

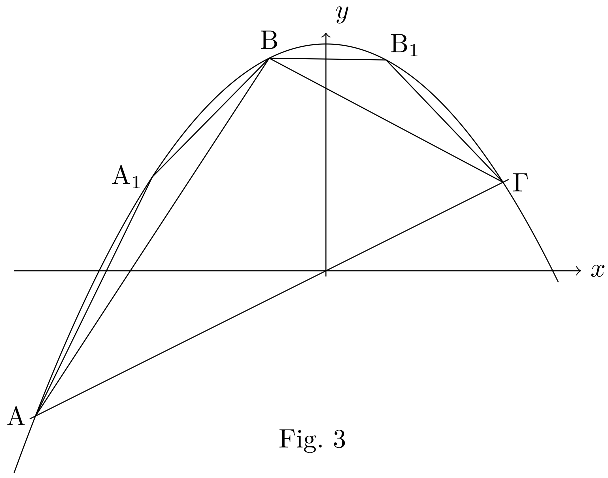


Fig. 3

Archimedes zeigt nun, daß der Flächeninhalt Δ_i, um den die Summe der Höhendreiecke im i-ten Schritt wächst, gerade $\Delta_{i-1}/4$ beträgt, m. a. W., es entsteht die geometrische Reihe

$$|\triangle(\mathrm{AB\Gamma})| \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}\right\}. \tag{4}$$

Den Grenzwert $s = \frac{4}{3}$ der Reihe in (4) für $n \to \infty$ bestimmt Archimedes wieder, indem er die Fälle $s < \frac{4}{3}$ und $s > \frac{4}{3}$ ausschließt.

In der Methodenschrift[7] behandelt Archimedes das Problem auf eine andere Art, wobei ein weiteres Mal das Hebelgesetz verwendet wird. Wir wollen diese sehr elegante Vorgehensweise kurz vorstellen, um dann entscheiden zu können, ob die Verwendung eines Satzes der Mechanik bei der Untersuchung einer geometrischen Fragestellung die Behauptung lediglich plausibel macht oder ob es sich dabei um einen strengen Beweis handelt.

Das zentrale Argument kann man an Fig. 4 verdeutlichen. Wieder ist $\mathcal{P}(\mathrm{AB\Gamma})$ ein Parabelbogen über der Sekante AΓ, wobei wir jetzt die zusätzliche Voraussetzung machen, daß AΓ die Achse der Parabel senkrecht schneidet.[8] Dann ist das Höhendreieck $\triangle(\mathrm{AB\Gamma})$ gleichschenkelig, und Δ ist der Mittelpunkt von AΓ. Die Gerade durch A, die senkrecht auf AΓ steht, und die Tangente an die Parabel in Γ schneiden sich im Punkt Z. Die Verlängerung von ΓB schneidet AZ in K. Da wie in dem ersten Beweis

[6] [1 : Prop. 17-27]
[7] [2 : 426 - 507]
[8] Diese Eigenschaft findet man auch in den Zeichnungen von J. L. Heibergs Ausgabe von [1]; die Beweise gelten aber für eine beliebige Lage der Sekante.

$$|\triangle(\mathrm{AZ\Gamma})| = 4 \cdot |\triangle(\mathrm{AB\Gamma})|$$

gilt, muß gezeigt werden:

$$|\triangle(\mathrm{ZA\Gamma})| = 3 \cdot |\mathcal{S}(\mathrm{AB\Gamma})|.$$

Dies geschieht nun so:

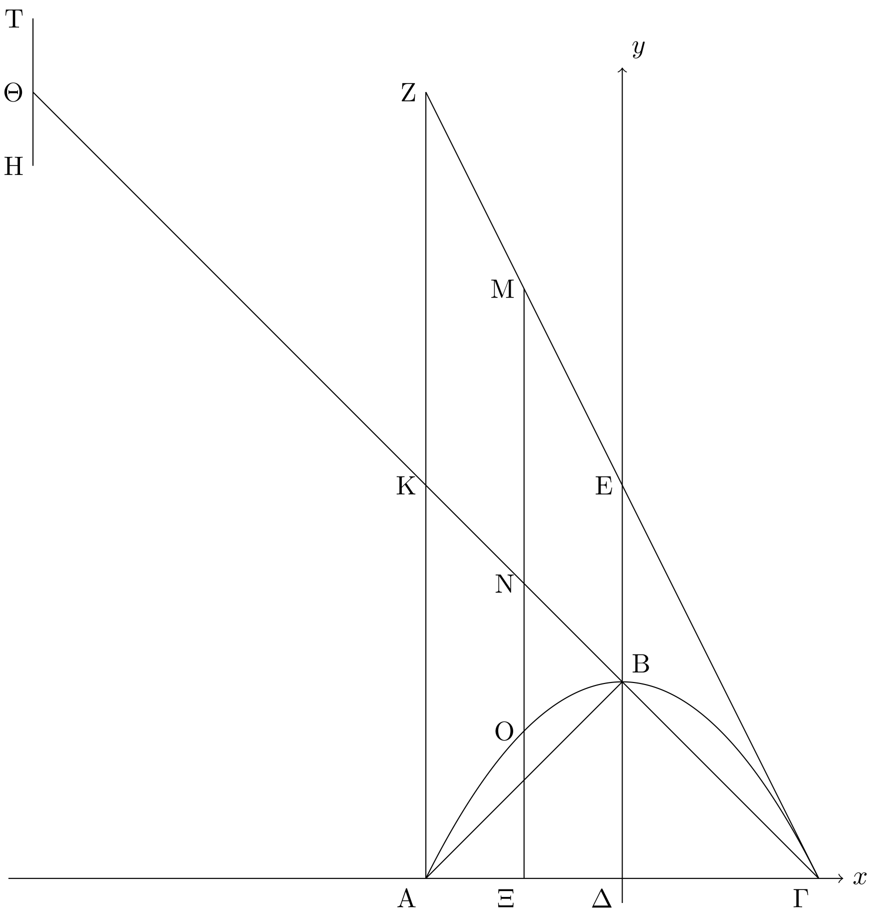


Fig. 4

Die Verlängerung der Höhe ΔB schneidet ΓZ in E; die Gerade durch B und Γ schneidet AZ in K, und auf ihr bestimmen wir den Punkt Θ, so daß $|\Theta\mathrm{K}| = |\mathrm{K\Gamma}|$ ist. Zunächst zeigt Archimedes, was wir auch in den beiden vorangegangenen Überlegungen verwendet hatten, nämlich:

$$|\triangle(\mathrm{AZ\Gamma})| = 4 \cdot |\triangle(\mathrm{AB\Gamma})|.$$

Nach dem Strahlensatz ist

$$\Delta\mathrm{E} : \mathrm{AZ} = \Gamma\Delta : \Gamma\mathrm{A},$$

und weil die Kurve ΑΒΓ eine Parabel ist, folgt

$$2 \cdot |\Gamma\Delta| = |\Gamma\mathrm{A}|.$$

Damit ist

$$2 \cdot |\Delta\mathrm{B}| = |\Delta\mathrm{E}|,$$

und somit ist der Flächeninhalt von $\triangle(\mathrm{AZ}\Gamma)$ viermal so groß wie der des Höhendreiecks.

Nun sei Ξ ein beliebiger Punkt auf der Strecke ΑΓ. Die Parallele zu AZ in Ξ schneidet den Parabelbogen in O, die Linie ΓΘ in N und die Linie ΓZ in M. Weil O ein Punkt auf der Parabel ist, unterteilt O die Strecke ΞM in demselben Verhältnis wie Ξ die Sekante ΑΓ:

$$\mathrm{M}\Xi : \mathrm{MO} = \Gamma\mathrm{A} : \mathrm{A}\Xi.$$ [9]

Nach dem Strahlensatz ist nun

$$\Gamma\mathrm{A} : \mathrm{A}\Xi = \Gamma\mathrm{K} : \mathrm{KN}$$

$$= \mathrm{K}\Theta : \mathrm{KN}, \tag{5}$$

da ja K der Mittelpunkt von ΓΘ ist. Damit ist das Verhältnis der Längen OΞ und ΞM umgekehrt proportional zum Abstand der Punkte N und Θ von K. Der Punkt N ist dann der Schwerpunkt der Strecke ΞM; wenn wir nun die Strecke ΞO parallel in die Strecke TH mit Mittelpunkt Θ verschieben, dann ist Θ der Schwerpunkt von TH. Damit sind aber die Gewichte im Gleichgewicht, die proportional zu den Längen von $\mathrm{TH} \equiv \Xi\mathrm{O}$ und ΞM sind und in deren Schwerpunkten Θ bzw. N an dem Waagebalken aufgehängt sind.[10]

Der Punkt Ξ ist auf der Strecke ΑΓ beliebig gewählt, also gilt die Gleichung (5) für alle Strecken dieser Art. Nun ist aber das Dreieck $\triangle(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z})$ aus Strecken zusammengesetzt, die wie ΞM auf ΑΓ beginnen und auf ΓZ enden; ebenso besteht das Parabelsegment $\mathcal{S}(\mathrm{AB}\Gamma)$ aus Strecken, die wie ΞO auf ΑΓ beginnen und auf der Parabel enden. Damit sind auch $\mathcal{S}(\mathrm{AB}\Gamma)$ und $\triangle(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z})$ als die Gesamtheiten dieser Strecken im Gleichgewicht, wobei das Parabelsegment im Punkt Θ aufgehängt ist. Der Schwerpunkt Λ des Dreiecks liegt auf der Winkelhalbierenden ΓK, und zwar so, daß diese im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird. Also sind $\mathcal{S}$, aufgehängt in Θ, und Δ, aufgehängt in Λ, im Gleichgewicht. Wegen

$$|\mathrm{K}\Lambda| = \frac{1}{3} \cdot |\mathrm{K}\Theta| \equiv \frac{1}{3} \cdot |\mathrm{K}\Gamma|$$

[9] [1 : Prop. 5]; die Aussage ist schon in Euklids Buch über Kegelschnitte enthalten.

[10] Daß die Strecken TH und MΞ mit dem Waagebalken keinen rechten Winkel bilden, ist für die Gleichgewichtsbedingung belanglos, da der zugehörige Proportionalitätsfaktor überall derselbe ist.

folgt daraus die Behauptung:

$$\begin{aligned}|\triangle(\mathrm{AB\Gamma})| &= \frac{1}{4} \cdot |\triangle(\mathrm{AZ\Gamma})| \\ &= \frac{3}{4} \cdot |\mathcal{S}(\mathrm{AB\Gamma})|.\end{aligned}$$

Unmittelbar im Anschluß an diese Überlegung erläutert Archimedes sein Vorgehen: „Dies ist nun zwar nicht bewiesen durch das hier Gesagte; es deutet aber darauf hin, daß das Ergebnis richtig ist. Da wir nun sehen, daß es nicht bewiesen ist, aber vermuteten, daß das Ergebnis richtig sei, so haben wir selbst einen geometrischen Beweis ersonnen, den wir schon früher veröffentlicht haben und auch unten anbringen werden.“ [11]

Mit dieser Bemerkung greift Archimedes wieder auf, was er in der Einleitung seiner Arbeit schon anspricht, daß nämlich mechanische Überlegungen Aussagen über die Größe von Flächen und Körpern plausibel machen können; auch dort kündigt er einen geometrischen Beweis am Ende der Arbeit an. In dem überlieferten Teil von [2] ist allerdings kein Beweis enthalten, so daß wir nicht wissen, welchen geometrischen Beweis Archimedes hier im Sinn hat. Nun haben wir aber zwei Beweise für die Integration des Parabelsegments gesehen; beide benutzen Ausschöpfungen durch elementare Figuren, die aus Dreiecken oder Trapezen zusammengesetzt sind. Und in beiden Fällen wird die Bestimmung des Grenzwertes indirekt geführt, wobei das „Lemma von Archimedes “[12], nach dem das Vielfache einer kleinen Größe jede vorgegebene Größe übertrifft, eine grundlegende Rolle spielt.

Eine das gesamte Werk von Archimedes umfassende Analyse liefert I. Schneider [36], wobei insbesondere die Beweismethoden von Archimedes und die Methodenschrift sehr detailliert untersucht werden. Für unsere Fragestellung entscheidend ist die Charakterisierung der Ausführungen in [2]: Weil die Annahme, daß ein Parabelsement bzw. ein Dreieck aus parallelen Strecken besteht,[13] nicht mathematisch exakt gefaßt werden kann, ist die Überlegung kein Beweis im strengen Sinne. Die Tatsache, daß ein Lehrsatz der Mechanik, der selbst mit geometrischen Begriffen formuliert und mit geometrischen Methoden bewiesen wird, bei der Untersuchung einer geometrischen Aussage verwendet wird, bedeutet nicht, daß damit die Schlußweise nicht exakt wäre.[14] Auch in der Darstellungsweise unterscheiden sich die Behauptungen in der Methodenlehre von den Propositionen

[11] [2 : Ausgabe von A. Cwalina, Anhang II, 386]

[12] In [1] tritt dieses Lemma in folgender Form auf: „Der Überschuß zwischen zwei ungleichen Flächen, um den die größere die kleinere übertrifft, kann, sofern man ihn [sc. genügend oft] addiert, gößer gemacht werden als jede vorgegebene Fläche.“ [1 : 264, Z. 9-12] Dies ist die ursprüngliche Formulierung des archimedischen Axioms.

[13] In dem folgenden Abschnitt wird ganz analog angenommen, daß Zylinder, Kugel und Kreiskegel durch Kreisscheiben ausgefüllt werden, vgl. [2 : 422].

[14] So urteilen auch E. J. Dijksterhuis[17] und B. L. van der Waerden [38]. Die gegenteilige Ansicht wird allerdings immer wieder vertreten; so bestreitet H. de Vries [37] grundsätzlich, daß ein mechanisches Argument in der Geometrie verwendet werden dürfe; ferner behauptet O. Becker [9], daß schon die Tatsache, daß Archimedes in [1] zwei Beweise liefere, zeige, daß der erste nicht exakt sein könne. Daß dies nicht zutreffen kann, zeigen z. B. die Beweise zur Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat; neben geometrischen Beweisen war der rein arithmetische so bekannt, daß Aristoteles ihn im Organon als ein bestens bekanntes Beispiel für einen indirekten Beweis anführt: Wenn Seite und Diagonale kommensurabel wären, dann wären gerade Zahlen ungerade, vgl. [4 : 41^a 23 - 30].

in den übrigen Schriften des Archimedes, worauf E. J. Dijksterhuis[15] hinweist, denn nur hier bezieht er sich bei der Formulierung eines Satzes auf Elemente einer Zeichnung. Auch diese formale Eigenart kann man als Hinweis dafür auffassen, daß es sich in der Methodenschrift um Plausibilitätsbetrachtungen, in der Quadratur der Parabel aber um exakte Beweise handelt.

3 Sätze der Reinen Mathematik, deren Beweise durch Anwendungen ermöglicht wurden

Das bei Archimedes gefundene Phänomen ist kein Einzelfall; wie Artmann bemerkt, kann man in jedem Gebiet der Mathematik solche Beispiele finden, und wir wollen hier verschiedene Fälle betrachten, bei denen Sätze der Reinen Mathematik mit einem Hilfsmitttel aus den Anwendungen bewiesen werden. Wir beginnen mit der Hebbarkeit isolierter Singularitäten bei elliptischen Diffferentialgleichungen, wobei wir uns auf den ebenen Fall beschränken wollen. Es sei $u\colon \dot{B}_1(0) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Lapalace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in} \qquad \dot{B}_1(0), \tag{6}$$

wobei $\dot{B}_1(0)$ die punktierte Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < 1\}$ ist. Wenn nun u bei Annäherung an den Nullpunkt schwächer wächst als die Funktion $\log\sqrt{x^2 + y^2}$, kann u harmonisch in den Nullpunkt hinein fortgesetzt werden, d.h. es gibt eine auf der ganzen Kreisscheibe definierte harmonische Funktion U, die auf $\dot{B}_1(0)$ mit u übereinstimmt.[16]

Für die viel kompliziertere Minimalflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0, \tag{7}$$

die vielleicht die am intensivsten studierte nichtlineare elliptische Gleichung ist, erwartet man eine ähnliche, möglicherweise kompliziertere Bedingung. Es gilt jedoch: Jede isolierte Singularität ist hebbar – ohne irgendwelche Bedingungen! Dieses spektakuläre Resultat wird 1951 von L. Bers [12] mit funktionentheoretischen Methoden bewiesen. Zur selben Zeit, im Juni 1951, wird an der University of Syracuse eine Dissertation angenommen, in der ein völlig anderer Zugang dasselbe Ergebnis liefert. Die Gleichung (7) tritt nämlich bei der Beschreibung von Potentialströmungen für kompressible Flüssigkeiten auf, und es ist dann naheliegend wie im inkompressiblen Fall, wo $\Delta u = 0$ die entsprechende Gleichung ist, nach punktförmigen Quellen und Senken zu suchen; bei der Laplace-Gleichung werden diese durch die singuläre Funktion $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ beschrieben. Daß man für (7) eine solche Funktion nicht finden kann, ist der Ausgangspunkt für den viel einfacheren Beweis des Hebbarkeitssatzes in der Dissertation [19] von R. Finn.[17]

Dieser Hebbarkeitssatz für die Minimalflächengleichung ist Vorbild für entsprechende Resultate bei allgemeineren nichtlinearen Gleichungen, auch in höheren Dimensionen. Dabei ergibt sich bei einem fundamentalen Problem erneut die

[15] [17 : 316, Fußnote 2]

[16] Wir verweisen auf [40 : 78-82], wo man neben dem Beweis für die Hebbarkeit (auch unter schwächeren Voraussetzungen) auch wertvolle historische Ausführungen findet.

[17] Siehe auch [20].

Lösung über eine physikalische Interpretation der Gleichung. Die Hebbarkeit ist bewiesen worden für Lösungen der H-Flächen-Gleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = \kappa u \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}^3 . \tag{8}$$

Die mittlere Krümmung $H(x, y, u) = \kappa u$ ist dabei proportional zur Höhe des Graphen $\{(x, y, z) : z = u(x, y)\}$; dabei muß allerdings $\kappa \geq 0$ sein. Der Fall $\kappa < 0$ konnte nicht behandelt werden, da die Maximumprinzipien, die für den Beweis im Fall $\kappa \geq 0$ ganz wesentlich sind, für negative κ nicht gelten. Den Lösungsweg eröffnet nun eine ingenieurwissenschaftliche Untersuchung von Kapillarflächen durch C. Huh,[18] bei der die Gestalt hängender Tropfen numerisch untersucht wird. Wenn die Adhäsionskräfte zwischen einem Flüssigkeitstropfen und einer Platte sowie die Kapillarkräfte groß genug sind gegenüber der Gravitation, dann kann es stationäre Konfigurationen geben, bei der ein Tropfen unter der Platte hängt, wie in Fig. 5a dargestellt.

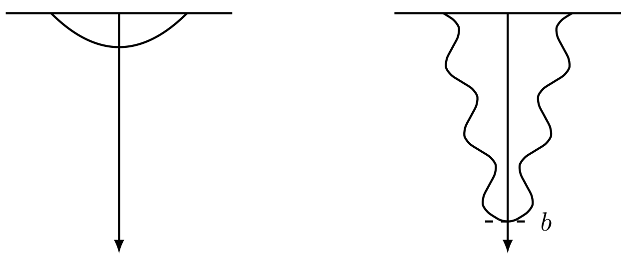


Fig. 5a, b

In diesem Fall erfüllt u die Gleichung (8) mit $\kappa < 0$. Solche Kapillarflächen müssen aber keine Graphen sein, und auch im allgemeinen Fall, wie er in Fig. 5b dargestellt ist, haben Kapillarflächen die mittlere Krümmung κz, wobei (x, y, z) ein Punkt der Kapillarfläche ist. Nun findet Huh heraus, daß sein numerisches Verfahren im rotationssymmetrischen Fall Lösungen für beliebige Werte von b liefert, der z-Komponente des tiefsten Punktes der Fläche; diese Kurven approximieren eine singuläre Lösung. Den Existenzbeweis liefern P. Concus und R. Finn [14], [15]; sie beweisen darüber hinaus die Eindeutigkeit der singulären Lösung, die sich wie $-\frac{const}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$, verhält. Damit ist also eine isolierte Singularität nachgewiesen, und die Frage nach der Hebbarkeit ist damit abgeschlossen, da nun für beliebiges Vorzeichen von κ optimale Resultate vorliegen.

Wie eingangs erwähnt, treten derartige Beispiele nicht gerade selten auf. So ist in[10] untersucht worden, unter welchen Bedingungen eine geschlossene Fläche Σ vorgeschriebener mittlerer Krümmung H existiert. Wie Beispiele zeigen, stellt die notwendige Bedingung

$$\oint_\Sigma H \cdot n d\sigma = 0, \tag{9}$$

[18] [23]

wobei n die äußere Normale an Σ bezeichnet, eine Einschränkung an die Daten H dar; eine geometrische Begründung hierfür ist nicht offensichtlich. (Nicht einmal für eine Störung $H(x)$ von $H_0(x) \equiv 0$ muß eine geschlossene H-Fläche in der Nähe der Sphäre existieren, deren mittlere Krümmung $H(x)$ ist.) Betrachten wir aber Σ als Kapillarfläche, die einen Tropfen Ω einer zähen Flüssigkeit berandet, dann kann es stationäre Konfigurationen, die aus einer Lösung (v, p) der Navier-Stokesschen Gleichungen und dem freien Rand Σ bestehen, nur für solche Kraftdichten $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ geben, die

$$\int_\Omega f(x)dx = 0, \tag{10}$$

erfüllen, d.h. der Schwerpunkt der Flüssigkeit ist fixiert. Weil in diesem Fall die mittlere Krümmung H von Σ durch $H = n \cdot T(v,p) \cdot n$ gegeben ist, wobei $T(v,p)$ den Spannungstensor bezeichnet, folgt (9) aus (10); jetzt können wir $H \cdot n$ als eine Kraft interpretieren, und damit ist offensichtlich, daß (9) eine Einschränkung an die Daten ist.

In diesen Beispielen wird dieselbe partielle Differentialgleichung einmal vom Standpunkt der Reinen Mathematik, dann hinsichtlich eines physikalischen Phänomens, das sie beschreibt, betrachtet; demgegenüber zeigt das nächste Beispiel, daß ein Satz über Wasserwellen ein grundlegendes Resultat aus der Zahlentheorie nach sich zieht. Die Gleichungen für Wasserwellen leitet 1781 als erster J.-L. de Lagrange her. Der Nachweis von Lösungen gelingt für lange Zeit nur für die linearisierten Gleichungen unter speziellen Annahmen an die Geometrie: entweder gibt es einen ebenen Boden oder die Wassertiefe ist überall unendlich. Das Modell für eine abfallende Küste betrachtet H. Lewy [28] als erster.

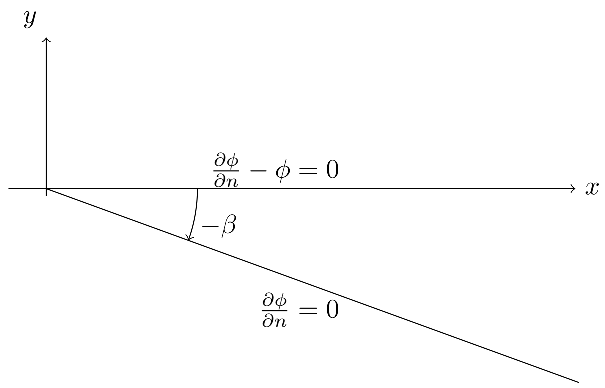


Fig. 6

Er sucht Lösungen der Form

$$y = y(x,t) = \frac{\nu}{g} \cdot \phi(x,0) \cdot \sin \nu t, \tag{11}$$

wobei $\phi(x,y)$ eine Lösung von

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in } S_\beta, \tag{12}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi = 0 \quad \text{auf } \partial^+ S_\beta, \tag{13}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial^- S_\beta, \tag{14}$$

ist. Hierbei bezeichnet $S_\beta \subset \mathbb{R}^2$ den Sektor $\{(r,\theta) : -\beta < \theta < 0,\ r > 0\}$ zwischen den Strahlen $\partial^+ S_\beta = \{(r,\theta) : \theta = 0\}$ und $\partial^- S_\beta = \{(r,\theta) : \theta = -\beta\}$; n ist die äußere Normale an S_β, und g ist die Gravitationskonstante. Lewy formuliert das Problem nun wie folgt: ϕ wird als Realteil einer in S_β holomorphen Funktion $W(z)$ betrachtet, und für diese Größe lautet die Randbedingung (13) so:

$$\mathrm{Re}[(i\frac{d}{dz} - 1)W(z)] = 0 \qquad \text{auf} \qquad \{\theta = 0\}. \tag{15}$$

Wenn man nun S_β an $\{\theta = -\beta\}$ spiegelt, erhält man das Gebiet $S_{2\beta} = \{(r,\theta) : -2\beta < \theta < 0\}$, und die entsprechende Fortsetzung von $W(z)$ ergibt auf dem Rand $\partial^- S_{2\beta} = \{(r,\theta) : \theta = -2\beta\}$ eine Bedingung vom selben Typ, nämlich

$$\mathrm{Re}[(-i\varepsilon\frac{d}{dz} - 1)W(z)] = 0 \qquad \text{auf} \qquad \{\theta = -2\beta\}. \tag{16}$$

mit $\varepsilon = e^{-2\beta i}$. Lewy gelingt es nun, für $W(z)$ auf $S_{2\beta}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung in z zu finden, so daß deren Lösung auf $\{\theta = 0\}$ und $\{\theta = -2\beta\}$ die Bedingungen (15) und (16) erfüllt; dazu multipliziert er (15) und (16) mit geeigneten Polynomen $f(\frac{d}{dz})$ und $g(\varepsilon\frac{d}{dz})$. Dann ergibt sich:

$$f(\frac{d}{dz})(-i\varepsilon\frac{d}{dz} - 1)W(z) = E(z) \qquad \text{in} \quad S_{2\beta}, \tag{17}$$

wobei $E(z)$ so bestimmt ist, daß diese Gleichung für $\theta = 0$ mit (15) und für $\theta = -2\beta$ mit (16) übereinstimmt. Diese Konstruktion ist möglich, sofern

$$\beta = \frac{\pi}{2}\frac{p}{q}, \tag{18}$$

gilt mit $p, q \in \mathbb{N}, p, q$ teilerfremd. Damit ist die ursprüngliche Randwertaufgabe (12) - (14) gelöst, da die Lösung von (17) mittels eines Reihenansatzes explizit angegeben werden kann. Neben einer Reihe von Eigenschaften dieser Lösungen, die den physikalischen Hintergrund von (11) - (14) betreffen, zeigt Lewy auch den folgenden Satz: Wenn $W(z)$ stetig von dem Gefälle, d.h. also von $\frac{p}{q}$ abhängt, folgt

$$(-1)^{N(2q,p)} \cdot (-1)^{N(p,q)} \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} = \text{const}, \tag{19}$$

wobei $N(p,q)$ die Anzahl der Terme $e^{i\frac{p}{q}\pi j}$, $1 \le j \le \frac{q-1}{2}$, ist, deren Imaginärteil negativ ist. Bekanntlich folgt daraus das quadratische Reziprozitätsgesetz.

Daß die Untersuchung einer Randwertaufgabe, die Wasserwellen beschreibt, zu einer Aussage über quadratische Reste führt, ist nicht nur auf den ersten Blick überraschend. Zweifellos ist der Lösungsweg, den Lewy findet, sehr originell.[19] Bei dem Übergang von den Randbedingungen (13) und (14) zu der gewöhnlichen Differentialgleichung in dem Sektor $S_{2\beta}$ spielen Kreisteilungspolynome eine entscheidende Rolle. Damit ist man natürlich viel näher am quadratischen Reziprozitätsgesetz – aber man ersetzt letztlich nur eine Überraschung durch eine andere, denn wer erwartet, daß Kreisteilungspolynome ein Hilfsmittel bei der Untersuchung einer elliptischen Randwertaufgabe sein können?

4 Ergebnisse der Reinen Mathematik, die ihren Ursprung in der Beschreibung von physikalischen Prozessen haben

In diesem Abschnitt sollen einige Beispiele angeführt werden, die zeigen, daß Teilgebiete der Reinen Mathematik aus der Untersuchung naturwissenschaftlicher Probleme entstehen können. Wir betrachten zunächst Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten[20] und die Lösungsverzweigung als Teilgebiet der Nichtlinearen Funktionalanalysis. Die Frage nach der Gestalt der Erde führt zu dem Problem, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten unter dem Einfluß der Selbstattraktion zu bestimmen.[21] Wenn Ω das von der Flüssigkeit eingenommene Gebiet ist, dann muß dessen Rand Σ eine Fläche sein, auf der das Potential der Summe aus Anziehungs- und Fliehkraft konstant ist:

$$\rho g \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} dy + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \text{const} \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma. \tag{20}$$

Hier sind ρ die als konstant angenommene Massendichte, g die Gravitationskonstante und ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Körper um die

[19]Völlig neue Wege zu gehen, war sicher eine der Stärken von H. Lewy; man vergleiche die Anmerkungen zu seinen Arbeiten in Band I der Selecta [29] und die Laudatio [22] von S. Hildebrandt anläßlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde an Lewy durch die Universität Bonn.

[20]Zu diesem Beispiel finden sich z.T. ausführlichere Darstellungen einzelner Punkte in[11], wo die erste Vorlesung von F. Hausdorff, „Figur und Rotation der Himmelskörper“besprochen wird. Nach der Promotion im Fach Astronomie hatte Hausdorff sich mit der Arbeit „Über die Absorbtion des Lichttes in der Atmosphäre“auch in diesem Fach habilitiert.

[21]Da in dieser Arbeit Beiträge von Archimedes eine wichtige Rolle spielen, sei darauf hingewiesen, daß im Grunde genommen von ihm das erste Ergebnis über Gleichgewichtsfiguren stammt. In seiner Arbeit über schwimmende Körper [3] beweist er zuerst, daß eine Wassermasse, bei der ein Teil auf den darunterliegenden Teil drückt, die Gestalt einer Kugel haben muß. Sowohl der geometrische Beweis als auch die hohe Abstraktionsstufe bei der Beschreibung des Problems sind sehr beeindruckend. Wenn das Wasser in einem offenen Gefäß enthalten ist, dann hängt der hydrostatische Druck nur von der Höhe ab, und er ist insbesondere unabhängig von der Gestalt des Gefäßes. Da Archimedes nicht weiß, welchen Einfluß die Gefäßwände haben, geht er von einer Flüssigkeit aus, die nicht von einem Behälter zusammengehalten wird. Uns ist heute ein solcher Ansatz geläufig, denn bei der Beschreibung der Umströmung eines Körpers nehmen wir an, daß der gesamte Raum außerhalb des Körpers von Flüssigkeit ausgefüllt ist, um den Einfluß einer Berandung auszuschließen. Wie ungewöhnlich dieser Ansatz war, sieht man auch daran, daß Willem van Moerbeke, der 1269 die Werke von Archimedes ins Lateinische übersetzt, in dem Halbsatz „wenn die Flüssigkeit nicht von irgendeinem Behälter zusammengehalten wird“ das Wort „nicht “ ausläßt, weil er sich möglicherweise eine solche Konffiguration gar nicht vorstellen kann, vgl. [3 : 318], insbes. Z. 7-8 und den kritischen Apparat. Erst im zweiten Abschnitt der Arbeit nimmt Archimedes an, daß die Körper auf einer Wassermasse mit einer ebenen Begrenzung schwimmen.

x_3-Achse dreht. I. Newton [34] hat bereits gezeigt, daß eine solche Figur an den Polen abgeplattet sein muß, und C. Maclaurin [32] findet die erste exakte Lösung, nämlich ein Rotationsellipsoid mit den Achsen $a_1 = a_2 > a_3$. Es ist eine große Überraschung, als C. G. J. Jacobi in [25] zeigt, daß es auch Ellipsoide mit drei verschiedenen Achsen $a_1 > a_2 > a_3$ gibt, die (20) erfüllen.[22] Sein Schüler C. O. Meyer untersucht in [33] die Familien von symmetrischen und allgemeinen Ellipsoiden genauer und findet den wichtigen Zusammenhang, daß es zu demselben Wert von ω verschiedene Ellipsoide als Lösungen geben kann. Zum einen haben wir die Familie der Maclaurin-Ellipsoide mit $a_1 = a_2 > a_3$, die mit der Kugel, $a_1 = a_2 = a_3$, beginnt und dann für $a_3 \to \infty$ und $a_1 = a_2 \to 0$ gegen eine unendlich dünne Kreisscheibe (mit unendlich großem Radius) konvergiert, und dann die Jacobische Familie, $a_1 > a_2 > a_3$, die mit einem rotationssymmetrischen Ellipsoid beginnt und für $a_2 > a_3 \to 0$ und $a_1 \to \infty$ gegen eine unendlich dünne Nadel konvergiert. Wenn man die Ellipsoide durch die Exzentrizität e charakterisiert,[23] dann ergibt sich folgendes Bild:

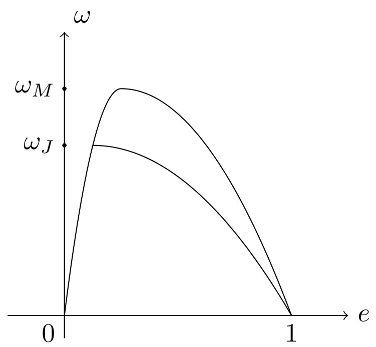


Fig. 7

Hier bezeichnet ω_M die maximale Winkelgeschwindigkeit der Maclaurin- und ω_J die der Jacobi-Ellipsoide. Offensichtlich liegt hier Lösungsverzweigung vor, und man sieht, daß damit eine Symmetriebrechung verbunden ist. Leider lesen Meyer und Jacobi das Diagramm von rechts nach links, nämlich so: Es gibt zwei Familien von Lösungen, die bei den entarteten Figuren (unendlich dünne Kreisscheibe bzw. Nadel) beginnen und sich dann in einem Punkt treffen.

P. L. Tschebyscheff versteht das Problem besser und stellt seinem Schüler A. M. Ljapounow die Aufgabe zu untersuchen, ob weitere Lösungen existieren, insbesonere für $\omega > \omega_M$ in der Nähe des zu ω_M gehörenden Maclaurin-Ellipsoids. In seiner Dissertation[24] gelingt Ljapounow nur der Nachweis von Näherungslösungen, aber er greift das Problem nach mehr als 20 Jahren erneut auf und beweist, daß in einer ganzen Reihe von Punkten auf den Kurven in Fig. 6 Lösungen abzweigen. Etwas später weist auch E. Schmidt [35] Lösungsverzweigung für

[22] Lagrange behauptet in der Mecanique Analytique [27 : 192], daß ein derartiges symmetrisches Problem nur symmetrische Lösungen haben könne.

[23] e bezeichnet die Exzentrizität der Schnitte bezogen auf die Achsen (a_1, a_2), bzw. (a_2, a_3).

[24] Die einschlägigen Arbeiten von Ljapounow sind in [30] zitiert.

die Gleichung (20) nach. Die Vorgehensweise der beiden Autoren könnte nicht unterschiedlicher sein: Wenn die Lösungen in Form von Reihen nachgewiesen werden, die Eigenfunktionen des Lapalce-Beltrami-Operators auf demjenigen Ellipsoid enthalten, von dem die neuen Lösungen abzweigen, dann rechnet Ljapounow mit den explizit bekannten Größen, während Schmidt erkennt, welche Strukturen hierbei auftreten: Skalarprodukt und Hilbertraum, Projektion eines Operators auf den Unterraum, der von den Eigenfunktionen der Linearisierung aufgespannt wird, Kompaktheit von Operatoren, usw. Daher ist es verständlich, daß die Arbeiten von Ljapounow über 600 Seiten umfassen,[25] der Beitrag von Schmidt aber relativ kurz ist. L. Lichtenstein, von dem die erste Monographie zu diesem Problemkreis stammt, beschreibt das unterschiedliche Vorgehen so: „Schließlich hat Ljapounow in der Sorge um die zahllosen an sein Problem sich knüpfenden Einzelheiten sich nicht darum bemüht, den allgemeinen Gedanken, auf dem seine Existenzbeweise beruhen, unabhängig von dem speziellen Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten herauszuarbeiten."[26] Für Lichtenstein gehört also zur Behandlung eines Problems der Angewandten Mathematik, bzw. Hydrostatik, daß der allgemeine Satz herausgearbeitet wird, der dem gesamten Verfahren zugrundeliegt, und diesen Satz kann man dann als ein neues Resultat der Reinen Mathematik betrachten, da er für eine Klasse von Gleichungen gilt, von der (20) nur ein Beispiel ist. Die weiteren Untersuchungen dieser Art gehören dann zu einem Teilgebiet der Nichtlinearen Funktionalanalysis, nämlich der Verzweigungstheorie für nichtlineare Operatoren.

Auch bei neueren Beiträgen finden wir dieses Phänomen. Der Träger des Gauß-Preises 2013, Y. Meyer, wird nach der Preisverleihung von Journalisten zum Verhältnis von Reiner und Angewandter Mathematik befragt. Seine Antwort faßt W. Dahmen, der Vorsizende der Kommission, die Meyer für den Gauß-Preis nominiert hat, so zusammen: „Die Angewandte Mathematik verlange, sich mit Problemen der realen Welt zu befassen. Sobald es gelungen sei, ein solches Problem in der Sprache der Mathematik zu formulieren und die nebensächlichen Details abzustreifen, stehe man einem Problem der Reinen Mathematik gegenüber. Die zukünftige Entwicklung bedeutender Bereiche der Mathematik sei dadurch geprägt, daß die Grenzen zwischen Angewandter und Reiner Mathematik mehr und mehr verschwimmen..."[27] Die Darstellung eines solchen Falles, etwa aus dem Arbeitsgebiet von Meyer, dürfte viel aufwendiger sein als unser Beispiel von vor etwa 100 Jahren. Es gibt zahlreiche weitere Beispiele für diese Entwicklung. Wie J.-P. Bourguignon [13] und C.-M. Marle [31] dargestellt haben, geht die Symplektische Geometrie auf Untersuchungen zur Himmelsmechanik zurück. Lagrange analysiert in [26], wie sich die elliptische Bahn, auf der sich ein Planet um die Sonne bewegt, verändert, wenn weitere Planeten durch ihre Anziehung diese Bahn beeinflußen. Für die Beschreibung der Bewegung benutzt Lagrange Koordinaten, die die Länge der Achsen der Ellipse, dann den Punkt auf der Ellipse, an dem sich der Planet befindet, und schließlich die Ebene, in der die Ellipse liegt, bezeichnen. Falls ein einzelner Planet die Sonne umkreist, sind diese Koordinaten konstant bis auf die Position des Planeten auf der Ellipse. Nun findet Lagrange, daß die Bewegungsgleichungen, welche die zeitliche Änderung

[25] Die daran anschließenden Beiträge für den Fall variabler Massendichte sind 435 Seiten lang.

[26] [30 : 35]

[27] [16 : 80]

dieser sechs Größen durch den Einfluß weiterer Planeten beschreiben, besonders einfach werden, wenn man Ausdrücke verwendet, die heute Lagrange-Klammern genannt werden. Später wird die Struktur dieses Raumes, auf dem die Bewegungen definiert sind, sehr intensiv untersucht, und 1939 nennt H. Weyl diese Geometrie symplektisch.[28]

5 Die These Wigners von der unvernünftigen Effektivität der Mathematik in den Naturwissenschaften

Von Wigner stammt der womöglich meistzitierte Aufsatz zur These, daß die Anwendbarkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften allen vernünftigen Erwartungen widerspreche – und viele Physiker und Mathematiker sagen dasselbe mit anderen Worten, ganz zu schweigen von den Geisteswissenschaftlern, von denen er immer wieder zitiert wird. Eine solche Behauptung steht und fällt mit ihren Voraussetzungen, nämlich der Charakterisierung der Mathematik und der modernen Naturwissenschaft. Wigner beschreibt die Mathematik als eine Wissenschaft der scharfsinnigen Operationen mit gerade dazu ersonnenen Begriffen und Regeln. Als Vorbild für seine Ausdrucksweise dient ihm die gelegentlich aufgestellte Behauptung, die Philosophie sei der Mißbrauch einer eigens zu diesem Zweck erfundenen Terminologie.[29] Wenn jemand die Philosophie als einen Mißbrauch charakterisiert, kann man vermuten, daß er sie überhaupt nicht schätzt. Dieser Aspekt ist aber nicht Teil des Vergleichs, vielmehr bewundert Wigner die Perfektion, die unser Denken in der Mathematik auszeichnet, so sehr, daß es ihm zufolge schwer zu glauben sei, daß diese Fähigkeit als Ergebnis eines Evolutionsprozesses im Sinne Darwins erklärt werden könne. Die komplexen Zahlen (und ihre Analysis) bezeichnet Wigner[30] als „particularly striking example“ für ein Gebiet der Mathematik, in dem neue Konzepte erdacht werden, um ästhetisch ansprechende Resultate von großer Allgemeinheit und Einfachheit zu zeigen. Daß gerade die Funktionentheorie zu den grundlegenden mathematischen Verfahren gehört, die in der Elektrotechnik verwnadt werden, hätte er als „most striking example“ für seine These hinzufügen können.

Wir können Wigners These so zusammenfassen:

(i) Die Begriffe der Mathematik werden lediglich am Beginn der Wissenschaft, als die elementare Geometrie und Arithmetik entstehen, gefaßt, um Größen zu beschreiben, die die Erkenntnis der realen Welt nahelegt.

[28] „Symplektisch“ ist das griechische Analogon zu „komplex“; so nennt Weyl diese Struktur zuerst, führt dann aber, weil dieses Wort schon in dem Beriff der komplexen Zahlen vorkommt, die neue Bezeichnung ein, vgl. [39 : 165].

[29] Als Quelle gibt Wigner das Buch „Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart“ von W. Dubislav an. Der Satz, den Wigner nur teilweise widergibt, lautet: „Was Philosophie eigentlich sei, ob eine Wissenschaft oder ein rationalisierter Mythos, ob die Tätigkeit, durch welche der Sinn der Aussagen und Begriffsbildungen der Wissenschaft festgestellt wird, oder der systematische Mißbrauch einer eigens zu diesem Zweck ersonnenen Terminologie, ist umstritten.“ Vgl [18 : 1].

[30] [41 : 225]

(ii) Mit der Entwicklung der Mathematik entstehen immer neue Begriffe wie z. B. komplexe Zahlen, Algebren, lineare Operatoren und Borel-Mengen, die ohne jeden Bezug zu Erkenntnissen der äußeren Welt definiert sind.

(iii) Die Aussagen, die mit mathematischen Methoden über diese Gegenstände gemacht werden können, erweisen sich später äußerst wertvoll für die Beschreibung physikalischer Prozesse. Und es ist überhaupt nicht einzusehen, warum das geschehen kann.

Das folgende Beispiel kann verdeutlichen, was Wigner meint. Bei der Analyse des Parallelenaxioms der Euklidischen Geometrie finden die Mathematiker neue Geometrien, in denen es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ nicht genau eine, sondern mehrere Geraden h gibt, die durch P gehen und g nicht schneiden.

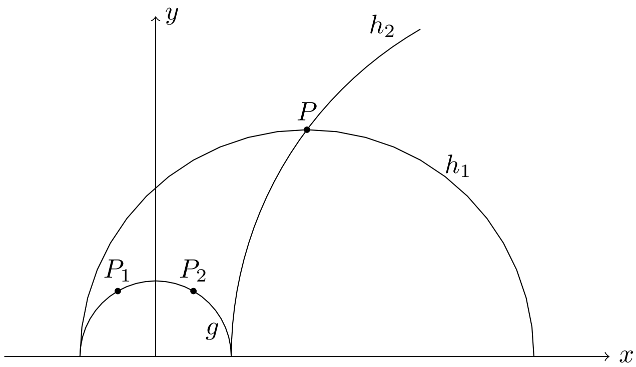


Fig. 8

In der oberen Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ kann man eine Metrik definieren, so daß die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ein Teil des Halbkreises ist, auf dem diese Punkte liegen, und dessen Mittelpunkt M auf der reellen Achse liegt. In dieser Geometrie können wir viele Parallelen h_1, h_2,.. zu g angeben, die alle durch einen vorgegebenen Punkt $P \notin g$ gehen. Wenn nun die obere Halbebene von einem optischen Medium ausgefüllt ist, dessen Dichte $d(x, y) = \frac{1}{y}$ ist, dann sind die Kreisbögen zwischen P_1 und P_2 gerade die Wege, auf denen sich das Licht ausbreitet gemäß dem Variationsprinzip, nach dem der Lichtweg dadurch ausgezeichnet ist, daß das Licht in kürzester Zeit von P_1 nach P_2 gelangt. Damit wird also eine Geometrie, die ohne jeden Bezug zur realen Welt entwickelt wurde, zur Beschreibung eines physikalischen Phänomens verwendet.

Die Beispiele, die Wigner für seine These angibt, sind viel komplexer; als die Grundgleichungen der Quantenmechanik ab 1925 formuliert werden, ist die Theorie der linearen Operatoren auf unendlichdimensionalen Vektorräumen so weit entwickelt, daß sie als mathematisches Hilfsmittel bereitsteht. Diese Theorie ist, so wird jedenfalls behauptet, entstanden, weil die Mathematiker die Beschränkung auf 3-dimensionale, dann n-dimensionale Räume überwinden wollten, und zwar allein aus innermathematischen Gründen. Weil es sich insbesondere um komplexe Vektorräume handelt, scheint überhaupt kein Bezug zur Wirklichkeit von Belang zu sein. Es ist aber angesichts vieler Beispiele – ein paar sind hier kurz vorgestellt – offensichtlich, daß neue Konzepte und Methoden der Mathematik nicht immer aus innermathematischen Gründen enwickelt werden; damit muß man Wigners Charakterisierung zumindest als einseitig kritisieren.

Eine weitere Voraussetzung für Wigners These betrifft die moderne Naturwissenschaft. Deren Beginn setzt er für die Physik mit dem Erscheinen von Newtons „Principia Mathematica Philosophiae Naturalis“ im Jahr 1687 an. Weder in der Arbeit [41] noch in den übrigen Beiträgen, die in dem Kapitel „Broader Philosophical Essays“[31] aufgenommen sind, nennt Wigner Gründe für die Entstehung der modernen Naturwissenschaften, noch gibt er eine genaue Charakterisierung. Was die moderne Physik von der Naturwissenschaft zur Zeit von Archimedes unterscheidet, wird nicht analysiert; er gesteht Archimedes zu, Gesetze der Physik gefunden zu haben, aber seine Entdeckungen könnten nicht als der wirkliche Beginn der Physik betrachtet werden.[32] Das Wesentliche der modernen Naturwissenschaften erklärt Wigner nun nicht an Beispielen aus Newtons Principia, sondern anhand von Galileis Fallgesetzen. Bei seinen Studien zu fallenden Körpern entdeckt Galilei Regelmäßigkeiten, die verschiedene überraschende Eigenschaften haben. Zwei Steine, aus derselben Höhe zur selben Zeit fallengelassen, erreichen den Boden zur selben Zeit.

Als überraschend stellt Wigner folgende Eigenschaften heraus:

(i) Diese Gleichzeitigkeit gilt nicht nur in Pisa zur Zeit Galileis, sie gilt überall auf der Erde und zu jeder Zeit, in der Vergangenheit wie in der Zukunft.
(ii) Die Regelmäßigkeit ist unabhängig von verschiedenen Faktoren, die grundsätzlich einen Einfluß auf das Ergebnis des Vorgangs haben könnten. So ist es unerheblich, ob es regnet oder nicht, ob die Steine in einem Gebäude oder am Schiefen Turm zu Boden fallen, ob eine Person die beiden Steine fallen läßt oder ob zwei Personen beteiligt sind u. a. m.
(iii) Am meisten überrascht aber, daß die Zeit, die ein Körper braucht, um aus der Ruhelage und aus einer bestimmten Höhe auf den Boden zu fallen, unabhängig ist von der Größe, dem Material und der Gestalt des Körpers.

Nun können aber diese Eigenschaften nicht als differentia specifica der neuen Naturwissenschaft betrachtet werden, da wir sie bei dem Hebelgesetz von Archimedes bereits vorfinden. Es gehört zum Wesen eines Naturgesetzes, wie es die Griechen verstehen, daß es immer und überall gilt. Und daß in das Hebelgesetz nur die Masse und nicht die Gestalt und die materielle Beschaffenheit des Körpers eingeht, postuliert Archimedes nicht nur, sondern formuliert es mit der Einführung des Massenmittelpunktes auch mathematisch exakt. Diesen Grad der Abstraktion und die zugehörige mathematische Analyse erreicht erst wieder Newton, wenn er zur Begründung, daß mit den für Massenpunkte nachgewiesenen Bahnen die Bewegung der Himmelskörper beschrieben wird, beweist, daß das Gravitationspotential einer Kugel übereinstimmt mit dem des Schwerpunktes, in dem die Masse konzentriert ist.[33]

Die Entstehung der modernen Naturwissenschaft und die Rolle, die die Mathematik dabei spielt, wird von ganz unterschiedlichen philosophischen Standpunkten

[31] [42 : 523-625]
[32] Vgl. „The Limits of Science“ in [42 : 523].
[33] [34 : Buch I, Kap. XII]

aus untersucht. Im Hinblick auf die Fragen, um die es in dieser Arbeit geht, sind sicher die Beiträge von E. Husserl von Bedeutung, der in seiner letzten Abhandlung „Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie“ auch die Entstehung der modernen Naturwissenschaft betrachtet. Zu der Rolle, die die Mathematik dabei spielt, heißt es: „Für den Platonismus hatte das Reale eine mehr oder minder vollkommene Methexis am Idealen. Das gab für die antike Geometrie Möglichkeiten einer primitiven Anwendung auf die Realität. In der Galileischen Mathematisierung der Natur wird nun diese selbst unter der Leitung der neuen Mathematik idealisiert, sie wird – modern ausgedrückt – selbst zu einer mathematischen Mannigfaltigkeit.“[34] Husserl führt diese Gedanken nicht genauer aus, da seine Abhandlung letztlich ein anderes Ziel verfolgt, als die Zusammenhänge zwischen Mathematik und moderner Naturwissenschaft zu analysieren. Dies geschieht ausführlicher etwa um dieselbe Zeit in der Vorlesung „Grundfragen der Metaphysik“[35] (WS 1935/36) von M. Heidegger; hier geht es um die Lehre I. Kants vom „System aller Grundsätze des reinen Verstandes“. Heidegger untersucht, was denn überhaupt Kants „Kritik der reinen Vernunft“ ermöglicht habe. Hier geht es zwar letztlich wie in [24] um ein ganz anderes Ziel, aber in dem Teil B.I. („Der geschichtliche Boden, auf dem Kants ‚Kritik der reinen Vernunft‘ ruht“) ist der §5 der „neuzeitlichen mathematischen Naturwissenschaft und ihrer Rolle bei der Entstehung der ‚Kritik der reinen Vernunft‘“ gewidmet.[36] Heidegger arbeitet den Unterschied zwischen der neuzeitlichen und der antiken bzw. mittelalterlichen Naturwissenschaft heraus, indem er den ersten Grundsatz oder das erste Gesetz der Bewegung analysiert: „Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht und so weit er nicht von eingeprägten Kräften gezwungen wird, jenen Zustand zu ändern.“[37] Dieses Trägheitsgesetz, das auch schon Galilei verwendet, ist vorher nicht nur unbekannt, vielmehr werden die Natur und das Seiende überhaupt in einer Weise erfahren, für die dieser Satz keinen Sinn hätte.[38] Der Unterschied zwischen moderner und antiker Naturwissenschaft besteht aber nicht, wie gelegentlich behauptet wird, darin, daß die antike Wissenschaft nicht von den Phänomenen ausgehe, vielmehr gehört zur Mathematisierung der Natur, die die moderne Wissenschaft charakterisiert, daß die Dinge nunmehr unter ganz anderen Voraussetzungen gesehen werden. Hat man früher Körper „gemäß ihnen selbst“ als „bewegbar hinsichtlich des Ortes“ betrachtet,[39] so daß also insbesondere der Grund für die Bewegung im Körper selbst ist und sich damit himmlische Körper anders bewegen als irdische, dann ist alles, was die antiken Autoren über die Bewegung sagen, nach dem modernen Ansatz ausgeschlossen. Dieser Unterschied kann nicht darauf reduziert werden, daß erst seit Galilei die Bewegung der Körper richtig beobachtet werde. Denn wenn Galilei bei seiner Formulierung des Trägheitssatzes sagt, er denke sich im Geiste ein sich selbst überlassenes Bewegbares, dann ist dieses Objekt (des Denkens) so wenig vorhanden wie der unbegrenzte Raum, der für diese Bewegung vorausgesetzt wird.[40] Diese Art, die Dinge zu sehen, nennt Heidegger

[34] [24 : 20]
[35] Veröffentlicht 1962 unter dem Titel „Die Frage nach dem Ding“, vgl.[21].
[36] [21 : 49-83]
[37] [34 : Axiome, Gesetz I]
[38] [21 : 61]
[39] [21 : 64]
[40] [21 : 70]

Mathematisierung, weil Platon das Sich-im-Geiste-denken Mathesis genannt hat. Viel wichtiger als diese Bezeichnung ist aber die Konsequenz, daß nunmehr Prozesse der Natur, wie am Beispiel der Bewegung von Körpern gezeigt, mit Methoden der Mathematik beschrieben werden können.[41] Wir halten fest, daß die Charakterisierung der modernen Naturwissenschaft, wie Wigner sie sieht, gewiß nicht zutreffend ist. Von Anfang an waren neuzeitliche Naturwissenschaft und Mathematik aufs Engste verbunden.

Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß der von Artmann herausgearbeitete Doppelcharakter von Theoremen als Einsicht und Werkzeug ein allgemeines Phänomen der Mathematik ist; selbst Ergebnisse der Naturwissenschaft können Werkzeuge sein für das Beweisen von Sätzen der Reinen Mathematik. Als eine Konsequenz ergibt sich, daß die These Wigners nicht haltbar ist, da er zum einen von einer strikten Trennung von Mathematik und Naturwissenschaft ausgeht und dabei zum anderen die Mathematik auf eine Wissenschaft von scharfsinnigen Operationen reduziert; hierbei übersieht er, daß es in erster Linie um Erkenntnis geht und mit den scharfsinnigen Operationen immer ein Ziel verfolgt wird, z. B. die asymptotische Verteilung von Primzahlen möglichst genau abzuschätzen.

Letztlich geht es Wigner darum darzustellen, daß wissenschaftliche Erkenntnis der Natur, die seit mehr als 400 Jahren immer intensiver betrieben wird und deren Resultate unser Leben grundlegend verändert haben, im Kern etwas Wunderbares ist. Dies bewußtgemacht zu haben, trägt sicher dazu bei, daß seine Arbeit so große Beachtung findet. Wie ist nun dieses Sich-wundern gemeint? Dieser Aspekt ist so alt wie die Wissenschaft selbst. „Denn weil sie staunen, beginnen die Menschen jetzt und begannen sie zu philosophieren“,[42] schreibt Aristoteles im 1. Buch der Metaphysik. Im Anschluß daran betont er, daß es um Erkenntnis geht, nicht um Nutzen. Dabei hat er aber jemanden im Blick, der sich wundert, wenn er etwas erfährt, und dabei nicht die Gründe kennt, warum es sich so verhält. Wenn er dann die Gründe einsieht, wundert er sich nicht mehr, wie z. B. ein Geometer nicht erstaunt ist, daß Seite und Diagonale im Quadrat inkommensurabel sind.[43]

Um diese Art des Staunens geht es Wigner nicht, da er weniger die einzelnen Erkenntnisse der Wissenschaft in den Blick nimmt, sondern die Vorgehensweise insgesamt betrachtet. Und da sind es insbesondere die Zusammenhänge zwischen Gebieten, in denen es zunächst um völlig verschiedene Dinge geht und Verbindungen nicht zu erwarten (und schon gar nicht intendiert) sind, über die wir uns

[41] [21 : 71-72]

[42] Der ganze Abschnitt lautet in der Übersetzung von Th. A. Szlezák: „Denn weil sie staunen, beginnen die Menschen jetzt und begannen sie anfänglich zu philosophieren, wobei sie zu Beginn über die naheliegenden Merkwürdigkeiten staunten, dann allmahlich so voranschritten und bei den bedeutenden Dingen Schwierigkeiten sahen, z. B. bei dem, was dem Mond widerfährt und was mit der Sonne geschieht und den Sternen und hinsichtlich der Entstehung des Alls.“ Vgl. [6 : $982^b 11 - 17$], [7 : 6].

[43] „Denn es beginnen alle, wie wir schon sagten, mit dem Staunen, ob es sich wirklich so verhält mit den selbstbewegten Marionetten oder bei den Sonnenwenden oder der Inkommensurabilität der Diagonale, denn es scheint allen, die die Ursache noch nicht erkannt haben, erstaunlich, wenn etwas mit der kleinsten Einheit nicht gemessen werden kann. Es muß aber die Sache beim Gegenteil und, nach dem Sprichwort, beim Besseren enden wie auch bei diesen Fragen, wenn die Lernenden den Sachverhalt verstanden haben: denn über nichts würde ein Geometer so sehr staunen, wie wenn die Diagonale kommensurabel wäre.“ [6 : $983^a 13 - 21$], [7 : 7].

wundern – und zwar immer mehr, je besser wir diese Verbindungen verstehen. Wigner stellt einen wichtigen Aspekt der wissenschaftlichen Erkenntnis heraus, und die Kritik an Einzelheiten seiner Begründung macht diesen Aspekt letztlich nur noch deutlicher bewußt. Zu einem tieferen Verständnis dieser Verbindungen kann sicherlich eine philosophische Analyse beitragen, welche die Bedingungen herausarbeitet, die die Entstehung und weitere Entwicklung der modernen Mathematik und Naturwissenschaft erst möglich gemacht haben.

Für kritische Anmerkungen danke ich den Herren S. Hildebrandt, W. Plesken, W. Purkert und H. Schupp sehr herzlich.

Literatur

[1] Archimedes: *Die Quadratur der Parabel,* in: Opera Omnia, hg. von J. L. Heiberg, Bd. II, pp. 261-315, Stuttgart, 1972, sowie in: Archimedes Werke, übers. von A. Czwalina, pp. 153-172, Darmstadt, 1972, und in: The Works of Archimedes, ed. by T. L. Heath, pp. 233-252, Mineola, NY, 2002

[2] Archimedes: *Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen,* in: Opera Omnia, hg. von J. L. Heiberg, Bd. II, pp. 425-507, Stuttgart, 1972, sowie in: *Eine neue Schrift des Archimedes*, übers. und komment. von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen, in: Bibliotheca Methematica, 3. Folge, 7. Band (1906-1907)321-363, und in: Appendix to The Works of Archimedes, ed. by T. L. Heath, pp. 12-51, Mineola, NY, 2002

[3] Archimedes: *Über schwimmende Körper,* in: Opera Omnia, hg. von J. L. Heiberg, Bd. II, pp. 318-413, Stuttgart, 1972, sowie in: Archimedes Werke, übers. von A. Czwalina, pp. 283-332, Darmstadt, 1972, und in: The Works of Archimedes, ed. by T. L. Heath, pp. 253-300, Mineola, NY, 2002

[4] Aristoteles: *Analytica Priora et Posteriora,* hg. von W. D. Ross, Oxford 1978

[5] Aristoteles: *Lehre vom Schluß oder Erste Analytik,* übers. von E. Rolfes, Hamburg, 1921

[6] Aristoteles: *Metaphysica,* hg. von W. Jaeger, Oxford 1973

[7] Aristoteles *Metaphysik,* übers. von Th. A. Szlezák, Berlin, 2003

[8] Artmann, B.: *Allgemeine Phänomene mathematischen Denkens in den Elementen Euklids,* Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 15(2007)165-172

[9] Becker, O.; Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik,* Bonn, 1951

[10] Bemelmans, J.: *A note on the interpretation of closed H-surfaces in physical terms,* manuscripta math. 36(1981)347-354

[11] Bemelmans, J.: *Die Vorlesung „Figur und Rotation der Himmelskörper“von F. Hausdorff, WS 1895/96, Universität Leipzig,* in: Felix hausdorff, Gesammelte Werke, hg. von E. Brieskorn, F. Hirzebruch, W. Purkert, R. Remmert und E. Scholz, Bd. V, Berlin, 2006, pp. 381-400

[12] Bers, L.: *Isolated Singularities of Minimal Surfaces* , Ann. of Math. 53(1951)364-386

[13] Bourguignon, J.-P.: *The 1808 memoir of Joseph-Louis de Lagrange and te birth of symplectic geometry,* Vortrag auf der Konferenz „Lagrange 200 years later“ , Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore di Pisa, 17. April 2013

[14] Concus, P.; Finn, R.: *A singular solution to the capillary equation. I: Existence,* Invent. Math. 29(1975)143-148

[15] Concus, Paul; Finn, Robert: *A singular solution to the capillary equation. II: Uniqueness,* Invent. Math. 29(1975)149-160

[16] Dahmen, W.: *Yves Meyer - Träger des Gauß-Preises 2010,* Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 19(2011)76-80

[17] Dijksterhuis, E.J.: *Archimedes,* Princeton, NJ, 1987

[18] Dubislav, W.: *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart,* Berlin, 1933

[19] Finn, R.: *On Some Properties of the Solutions of a Class of Non-Linear Partial Differential Equations,* Syracuse University, Syracuse, NY, 1951.

[20] Finn, R.: *Isolated Singularities of Solutions of Non-linear Partial Differential Equations* , Trans. Amer. Math. Soc. 75(1953)385-404

[21] Heidegger, M.: *Die Frage nach dem Ding,* Tübingen, ^{3}1987

[22] Hildebrandt, S.;Hirzebruch, F., et al.: *Mathematische Berachtungen. Ehrenpromotionen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät am 28. November 1986,* Bonn, 1988

[23] Huh, C.: *Capillary hydrodynamics: Interfacial instability and the solid/liquid/fluid contact line,* Dissertation, Dep. of Chem. Eng., Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1969

[24] Husserl, E.: *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie,* Husserliana Band VI, hg. von W. Biemel, Haag, ^{2}1976

[25] Jacobi, C. G. J.: *Über die Figur des Gleichgewichts,* Poggendorffs Ann. Phys. Chem. 33(1834)229-233

[26] Lagrange, J.-L. de: *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planetes et en particulier des variations des grand axes de leur orbites,*

[27] Lagrange, J.-L. de: *Méchanique Analytique,* Nachdruck der Ausgabe von 1788, Paris, 1965

[28] Lewy, H.: *Water Waves on Sloping Beaches,* Bull. Amer. Math. Soc. 52(1946)737-775

[29] Lewy, H.: *Selecta, ed by D. Knderlehrer,* 2 vols, Basel, 2002

[30] Lichtenstein, L.: *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüsigkeiten,* Berlin, 1933

[31] Marle, C.-M.: *The inception of symplectic geomery: the works of Lagrange and Poisson during the years 1808-1810,* Lett. math. Phys. 90(2009)3-21

[32] Maclaurin, C.: *A treatise of Fluxions,* Edinburgh, 1742, vgl. auch Todhunter, I.: *A History of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth,* Kap. IX, New York, NY, 1962 (Nachdrck von 1873)

[33] Meyer, C. O.: *De aequilibrii formis ellipsoidicis,* J. Reine Angew. Math. 24(1842)44-59

[34] Newton, I.: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* hg. von A.Koyré und I. B. Cohen, Cambridge, MA, 1972; Übersetzung „Die mathematischen Prinzipien der Physik“ von V. Schüller, Berlin, 1999

[35] Schmidt, E.: *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen,* Math. Ann. 65(1908)370-399

[36] Schneider, I.: *Archimedes,* Darmstadt, 1979

[37] Vries, H. de: *Over Archimedes' „Methodenleer der mechanische Leerstellingen“ ,* in: ders., *Historische Studiën*, deel 1, Groningen, 1926, pp. 136-150

[38] Waerden, B.L. van der: *Science Awakening I,* Dordrecht, ^{5}1988

[39] Weyl, H.: *The Classical Groups,* Princeton, NJ, 1939

[40] Wienholtz, E.; Kalf, H.; Kriecherbauer, T.: *Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung,* Berlin, 2009

[41] Wigner, E. P.: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,* Comm. Pure Appl. Math. 13(1960)1-14

[42] Wigner, E. P.: *Philosophical Reflections and Syntheses,* New York, ^{2}1997

Reports des Instituts für Mathematik der RWTH Aachen

[1] Bemelmans J.: *Die Vorlesung "Figur und Rotation der Himmelskörper" von F. Hausdorff, WS 1895/96, Universität Leipzig*, S 20, März 2005
[2] Wagner A.: *Optimal Shape Problems for Eigenvalues*, S 30, März 2005
[3] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal representation of surfaces, and Plateau's problem for Cartan functionals*, S 43, Juli 2005
[4] Reiter P.: *All curves in a C^1-neighbourhood of a given embedded curve are isotopic*, S 8, Oktober 2005
[5] Maier-Paape S., Mischaikow K. and Wanner T.: *Structure of the Attractor of the Cahn-Hilliard Equation*, S 68, Oktober 2005
[6] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *On rectifiable curves with L^p bounds on global curvature: Self–avoidance, regularity, and minimizing knots*, S 35, Dezember 2005
[7] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for weighted Sobolev constants*, S 23, Dezember 2005
[8] Bandle C. and Wagner A.: *Sobolev Constants in Disconnected Domains*, S 9, Januar 2006
[9] McKenna P.J. and Reichel W.: *A priori bounds for semilinear equations and a new class of critical exponents for Lipschitz domains*, S 25, Mai 2006
[10] Bandle C., Below J. v. and Reichel W.: *Positivity and anti-maximum principles for elliptic operators with mixed boundary conditions*, S 32, Mai 2006
[11] Kyed M.: *Travelling Wave Solutions of the Heat Equation in Three Dimensional Cylinders with Non-Linear Dissipation on the Boundary*, S 24, Juli 2006
[12] Blatt S. and Reiter P.: *Does Finite Knot Energy Lead To Differentiability?*, S 30, September 2006
[13] Grunau H.-C., Ould Ahmedou M. and Reichel W.: *The Paneitz equation in hyperbolic space*, S 22, September 2006
[14] Maier-Paape S., Miller U.,Mischaikow K. and Wanner T.: *Rigorous Numerics for the Cahn-Hilliard Equation on the Unit Square*, S 67, Oktober 2006
[15] von der Mosel H. and Winklmann S.: *On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds*, S 43, November 2006
[16] Hildebrandt S., Maddocks J. H. and von der Mosel H.: *Obstacle problems for elastic rods*, S 21, Januar 2007
[17] Galdi P. Giovanni: *Some Mathematical Properties of the Steady-State Navier-Stokes Problem Past a Three-Dimensional Obstacle*, S 86, Mai 2007
[18] Winter N.: *$W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations*, S 34, Juli 2007
[19] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *A geometric curvature double integral of Menger type for space curves*, S 20, September 2007
[20] Bandle C. and Wagner A.: *Optimization problems for an energy functional with mass constraint revisited*, S 20, März 2008
[21] Reiter P., Felix D., von der Mosel H. and Alt W.: *Energetics and dynamics of global integrals modeling interaction between stiff filaments*, S 38, April 2008
[22] Belloni M. and Wagner A.: *The ∞ Eigenvalue Problem from a Variational Point of View*, S 18, Mai 2008
[23] Galdi P. Giovanni and Kyed M.: *Steady Flow of a Navier-Stokes Liquid Past an Elastic Body*, S 28, Mai 2008
[24] Hildebrandt S. and von der Mosel H.: *Conformal mapping of multiply connected Riemann domains by a variational approach*, S 50, Juli 2008
[25] Blatt S.: *On the Blow-Up Limit for the Radially Symmetric Willmore Flow*, S 23, Juli 2008
[26] Müller F. and Schikorra A.: *Boundary regularity via Uhlenbeck-Rivière decomposition*, S 20, Juli 2008
[27] Blatt S.: *A Lower Bound for the Gromov Distortion of Knotted Submanifolds*, S 26, August 2008
[28] Blatt S.: *Chord-Arc Constants for Submanifolds of Arbitrary Codimension*, S 35, November 2008
[29] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *Regularizing and self-avoidance effects of integral Menger curvature*, S 33, November 2008
[30] Gerlach H. and von der Mosel H.: *Yin-Yang-Kurven lösen ein Packungsproblem*, S 4, Dezember 2008
[31] Buttazzo G. and Wagner A.: *On some Rescaled Shape Optimization Problems*, S 17, März 2009
[32] Gerlach H. and von der Mosel H.: *What are the longest ropes on the unit sphere?*, S 50, März 2009
[33] Schikorra A.: *A Remark on Gauge Transformations and the Moving Frame Method*, S 17, Juni 2009
[34] Blatt S.: *Note on Continuously Differentiable Isotopies*, S 18, August 2009
[35] Knappmann K.: *Die zweite Gebietsvariation für die gebeulte Platte*, S 29, Oktober 2009
[36] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Integral Menger curvature for surfaces*, S 64, November 2009
[37] Maier-Paape S., Imkeller P.: *Investor Psychology Models*, S 30, November 2009
[38] Scholtes S.: *Elastic Catenoids*, S 23, Dezember 2009
[39] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *On the Steady Motion of an Elastic Body Moving Freely in a Navier-Stokes Liquid under the Action of a Constant Body Force*, S 67, Dezember 2009
[40] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Past a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 25, Dezember 2009

[41] Galdi G.P. and Kyed M.: *Steady-State Navier-Stokes Flows Around a Rotating Body: Leray Solutions are Physically Reasonable*, S 15, Dezember 2009
[42] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *Fluid Flows Around Floating Bodies, I: The Hydrostatic Case*, S 19, Dezember 2009
[43] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres*, S 91, März 2010
[44] Gerlach H. and von der Mosel H.: *On sphere-filling ropes*, S 15, März 2010
[45] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Tangent-point self-avoidance energies for curves*, S 23, Juni 2010
[46] Schikorra A.: *Regularity of $n/2$-harmonic maps into spheres (short)*, S 36, Juni 2010
[47] Schikorra A.: *A Note on Regularity for the n-dimensional H-System assuming logarithmic higher Integrability*, S 30, Dezember 2010
[48] Bemelmans J.: *Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur*, S 14, Januar 2011
[49] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Tangent-point repulsive potentials for a class of non-smooth m-dimensional sets in $\mathbb{R}^n$. Part I: Smoothing and self-avoidance effects*, S 47, Februar 2011
[50] Scholtes S.: *For which positive p is the integral Menger curvature $\mathcal{M}_p$ finite for all simple polygons*, S 9, November 2011
[51] Bemelmans J., Galdi G. P. and Kyed M.: *Fluid Flows Around Rigid Bodies, I: The Hydrostatic Case*, S 32, Dezember 2011
[52] Scholtes S.: *Tangency properties of sets with finite geometric curvature energies*, S 39, Februar 2012
[53] Scholtes S.: *A characterisation of inner product spaces by the maximal circumradius of spheres*, S 8, Februar 2012
[54] Kolasiński S., Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Characterizing $W^{2,p}$ submanifolds by p-integrability of global curvatures*, S 44, März 2012
[55] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *On the Steady Motion of a Coupled System Solid-Liquid*, S 95, April 2012
[56] Deipenbrock M.: *On the existence of a drag minimizing shape in an incompressible fluid*, S 23, Mai 2012
[57] Strzelecki P., Szumańska M. and von der Mosel H.: *On some knot energies involving Menger curvature*, S 30, September 2012
[58] Overath P. and von der Mosel H.: *Plateau's problem in Finsler 3-space*, S 42, September 2012
[59] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *Menger curvature as a knot energy*, S 41, Januar 2013
[60] Strzelecki P. and von der Mosel H.: *How averaged Menger curvatures control regularity and topology of curves and surfaces*, S 13, Februar 2013
[61] Hafizogullari Y., Maier-Paape S. and Platen A.: *Empirical Study of the 1-2-3 Trend Indicator*, S 25, April 2013
[62] Scholtes S.: *On hypersurfaces of positive reach, alternating Steiner formulæ and Hadwiger's Problem*, S 22, April 2013
[63] Bemelmans J., Galdi G.P. and Kyed M.: *Capillary surfaces and floating bodies*, S 16, Mai 2013
[64] Bandle, C. and Wagner A.: *Domain derivatives for energy functionals with boundary integrals; optimality and monotonicity.*, S 13, Mai 2013
[65] Bandle, C. and Wagner A.: *Second variation of domain functionals and applications to problems with Robin boundary conditions*, S 33, Mai 2013
[66] Maier-Paape, S.: *Optimal f and diversification*, S 7, Oktober 2013
[67] Maier-Paape, S.: *Existence theorems for optimal fractional trading*, S 9, Oktober 2013
[68] Scholtes, S.: *Discrete Möbius Energy*, S 11, November 2013
[69] Bemelmans, J.: *Optimale Kurven – über die Anfänge der Variationsrechnung*, S 22, Dezember 2013
[70] Scholtes, S.: *Discrete Thickness*, S 12, Februar 2014
[71] Bandle, C. and Wagner A.: *Isoperimetric inequalities for the principal eigenvalue of a membrane and the energy of problems with Robin boundary conditions.*, S 12, März 2014
[72] Overath P. and von der Mosel H.: *On minimal immersions in Finsler space.*, S 26, April 2014
[73] Bandle, C. and Wagner A.: *Two Robin boundary value problems with opposite sign.*, S 17, Juni 2014
[74] Knappmann, K. and Wagner A.: *Optimality conditions for the buckling of a clamped plate.*, S 23, September 2014
[75] Bemelmans, J.: *Über den Einfluß der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene auf die Reine Mathematik und die These von Wigner*, S 23, September 2014