RWTH AACHEN

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Institut für Mathematik

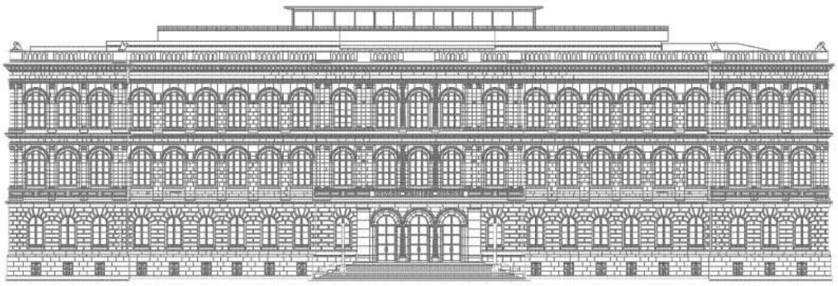
Die zweite Gebietsvariation für die gebeulte Platte

by

Kathrin Knappmann

Report No. **35** 2009

October 2009



Institute for Mathematics, RWTH Aachen University

Templergraben 55, D-52062 Aachen
Germany

Die zweite Gebietsvariation für die gebeulte Platte

Kathrin Knappmann

28. Dezember 2009

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird mit Hilfe der zweiten Gebietsvariation die Eindeutigkeit der Rayleigh'schen Vermutung für die gebeulte Platte in zwei Dimensionen bewiesen. Diese auf den englischen Physiker Lord John W. Rayleigh zurückgehende Vermutung lautet (siehe z. B. [6], S. 382):

> Unter allen Platten von gegebenem Flächeninhalt und konstanter Dichte und Elastizität besitzt eine kreisförmige Platte die tiefsten Grundfrequenz.

Ernst Mohr bewies die Eindeutigkeit dieser Vermutung für eine eingeklemmte Platte in zwei Dimensionen (siehe [5]). Der folgende Beweis für eine gebeulte Platte, d. h. einer eingeklemmten Platte auf die eine seitliche Kraft wirkt, orientiert sich an dieser Arbeit von Mohr.

1.1 Das mathematische Modell

Um die Eindeutigkeit der Rayleigh'schen Vermutung zu zeigen, muss die Existenz einer tiefsten Grundfrequenz und einer Platte, die diese tiefste Grundfrequenz besitzt, angenommen werden. In der mathematischen Modellierung wird die optimale Platte durch ein Gebiet Ω in $\mathbb{R}^2$ repräsentiert. Für dieses optimale Gebiet Ω und seinen Rand $\partial\Omega$ werden die folgenden Annahmen getroffen: das Gebiet Ω sei beschränkt und der Rand $\partial\Omega$ sei analytisch. Zudem habe der Rand $\partial\Omega$ endliches eindimensionales Lebesgue-Maß. Die Grundfrequenz des optimalen Gebiets wird mit $\lambda = \lambda(\Omega)$ bezeichnet und erfüllt $\lambda > 0$. Der Zusammenhang zwischen dem Gebiet Ω und seiner Grundfrequenz λ ist über die Minimierung des folgenden Rayleigh-Quotienten gegeben.

$$\lambda(\Omega) = \min_{\substack{v \in H_0^{2,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega (\Delta v)^2 dx}{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx} = \min_{\substack{v \in H_0^{2,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} \mathcal{R}(v).$$

Die Grundschwingung u der optimalen Platte ist ein Minimierer des Funktionals $\mathcal{R}$, d. h. die Grundschwingung u erfüllt

$$\lambda(\Omega) = \mathcal{R}(u) = \frac{\int_\Omega (\Delta u)^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx} = \min_{\substack{v \in H_0^{2,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega (\Delta v)^2 dx}{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx} \tag{1}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen, die u als Minimierer des Funktionals $\mathcal{R}$ erfüllt, lauten

$$\begin{cases} \Delta^2 u \ + \lambda \, \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0, \ \nabla u = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Die Grundfrequenz λ ist der erste Eigenwert des Eigenwertproblems (2), die Grundschwingung u ist die dazugehörige erste Eigenfunktion. Im Folgenden wird u stets durch $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 1$ normiert sein.

1.2 Der Rand des optimalen Gebiets

Die Funktion $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ sei die Bogenlängenparametrisierung des Randes $\partial\Omega$, d. h. es gilt $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ für alle $s \in I$. Dabei ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Dann ist die äußere Normale $\nu(s)$ an $\partial\Omega$ im Punkt $\gamma(s)$ gegeben durch

$$\nu(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Der Winkel $\alpha(s)$ ist $\alpha(s) = -\frac{\pi}{2} + \beta(s)$, wobei $\beta(s) \in [0, 2\pi)$ der Winkel der Tangente an $\partial\Omega$ im Punkt $\gamma(s)$ und der positiven x-Richtung ist (siehe dazu z. B. [8], S. 19).
Die Krümmung $\kappa(s)$ des Randes $\partial\Omega$ ist dann gegeben durch $\kappa(s) = \dot{\alpha}(s)$ (vgl. [1], S. 30). Betrachtungen in der Nähe des Randes $\partial\Omega$ werden im Verlauf dieser Arbeit in Fermi-Koordinaten (siehe z. B. [4], Kapitel 4.6) gemacht. In diesen speziellen Koordinaten gilt für $v \in C^2(\overline{\Omega})$ in $\partial\Omega$

$$\Delta v = \partial_\nu^2 v + \kappa \, \partial_\nu v + \partial_s^2 v, \tag{4}$$

wobei ∂_ν die Ableitung in Normalenrichtung und ∂_s die Ableitung in tangentialer Richtung bezeichnet. Ist $v \in C^3(\overline{\Omega})$, dann gilt in $\partial\Omega$ außerdem

$$\kappa \ (\partial_\nu v)^2 = v_x \, \partial_s v_y - v_y \, \partial_s v_x \qquad \text{und} \tag{5}$$

$$\partial_\nu^3 v = \partial_\nu \Delta v - \kappa \, \Delta v \, . \tag{6}$$

Für die Normalenableitungen der partiellen Ableitungen der Grundschwingung u gilt aufgrund der speziellen Gestalt des Normalenvektors nach (3)

$$\partial_\nu u_{x_1} = \Delta u \, \cos\alpha(s) \quad \text{und} \quad \partial_\nu u_{x_2} = \Delta u \, \sin\alpha(s). \tag{7}$$

1.3 Funktionale

In Weiteren werden die folgenden quadratischen Funktionale auf $H^{2,2}(\Omega)$ benutzt. Für $v \in H^{2,2}(\Omega)$ sei

$$
\begin{aligned}
&(i)\ D(v) := \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx &\qquad &(ii)\ H(v) := \int_\Omega v^2\,dx\\
&(iii)\ P(v) := \int_\Omega (\Delta u)^2 dx &\qquad &(iv)\ J(v) := \int_\Omega \left|D^2 v\right|^2 dx\\
&(v)\ d(u) := \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu v)^2 dS
\end{aligned}
$$

2 Die erste Gebietsvariation

2.1 Eigenschaften der Grundschwingung u

Durch Variation des Gebiets Ω werden zunächst Eigenschaften der Grundschwingung u gezeigt. Der Flächeninhalt des variierten Gebiets soll dabei mit dem Flächeninhalt des optimalen Gebiets Ω übereinstimmen. Solche flächentreuen Variationen werden in der folgenden Definition eingeführt.

(2.1) Definition. Sei $\varepsilon \neq 0$ und $\eta, \zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Die Funktion $\Phi_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $\Phi_\varepsilon(x) := x + \mu(x, \varepsilon)$ heißt Variation des Gebiets Ω. Dabei ist

$$\mu(x, \varepsilon) := \varepsilon\, \eta(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, \zeta(x) + o(\varepsilon^2).$$

Φ_ε heißt flächentreue Variation, falls für den Flächeninhalt des Gebiets $\Omega_\varepsilon := \Phi_\varepsilon(\Omega)$ gilt

$$|\Omega_\varepsilon| = |\Omega| + o(\varepsilon^2).$$

(2.2) Bemerkung. *Um die Flächentreue zu sichern werden im Folgenden ausschließlich Variationen der Form Φ_ε wie in Defintion (2.1) mit den zusätzlichen Eigenschaften*

$$\eta = V\,\nu \quad \text{und} \quad \zeta = W\,\nu \quad \text{in } \partial\Omega$$

für ein V und ein W in $C^\infty(I, \mathbb{R})$ mit

$$\int_I V\,ds \;=\; 0 \quad \text{und} \quad W \;=\; -\kappa\, V^2$$

betrachtet. Dabei ist κ die Krümmung von $\partial\Omega$.

Der Eigenwert λ des Eigenwertproblems (2) lässt sich über ein Randintegral darstellen (vgl. [7]). Um dies zu zeigen wird die minimierende Eigenschaft der Grundschwingung u für (1) ausgenutzt.

(2.3) Satz. *Der Eigenwert* λ *von Problem (2) kann über das Randintegral*

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 x.\nu \, dS$$

beschrieben werden. Dabei ist u *eine normierte Lösung von (2).*

Eine weitere Randbedingung an die Grundschwingung u erhält man aus der Optimalität des Gebiets Ω.

(2.4) Satz. *Für eine Lösung* u *von* (1) *mit* $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 1$ *gilt*

$$\Delta u = c > 0 \quad \textit{in } \partial\Omega.$$

Beweis. Das Gebiet Ω_ε sei aus Ω durch eine Gebietsvariation nach (2.2) entstanden. Definiert man $u_\varepsilon := u \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$, dann gilt aufgrund der minimierenden Eigenschaft von u und der Optimalität von Ω

$$\lambda = \frac{\int_\Omega (\Delta u)^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx} \leq \min_{\substack{v \in H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega (\Delta v)^2 dx}{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx} \leq \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u_\varepsilon)^2 dy}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dy}.$$

Mittels Transformation des Integrationsgebiets und partieller Integration erhält man aus dieser Ungleichung

$$0 \leq -\varepsilon \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \eta.\nu \, dS + o(\varepsilon).$$

Da das Vorzeichen von ε frei wählbar ist, muss

$$\int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \eta.\nu \, dS = 0$$

gelten. Mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung folgt daraus $(\Delta u)^2 = c^2$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Nach Satz (2.3) gilt dann für den Eigenwert λ

$$\lambda = \frac{1}{2} c^2 \int_{\partial\Omega} x.\nu \, dS = c^2 \, |\Omega| \,. \tag{8}$$

Damit muss $c \neq 0$ gelten und somit $\Delta u = c \neq 0$ in $\partial\Omega$ sein. □

Es ist also $\Delta u = \textit{const.}$ in $\partial\Omega$ für jede normierte Eigenfunktion u von Problem (2) zum Eigenwert λ. Insbesondere ist nach (8) diese Konstante durch λ und $|\Omega|$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Daraus schließt man, dass es nur eine normierte Grundschwingung geben kann.

(2.5) Korollar. *Der Eigenwert* λ *von Problem (2) ist einfach, d. h. jede Lösung* v *des Problems (2) ist von der Form* $v = a\,u$ *mit* $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Angenommen, es existiert neben u eine weitere normierte Eigenfunktion $\tilde{u}$ zum Eigenwert λ mit $\Delta\tilde{u} = \Delta u = c$ in $\partial\Omega$. Dann ist auch $U := \frac{1}{\sqrt{2}}(u - \tilde{u})$ eine normierte Eigenfunktion. Im Widerspruch zu Satz (2.4) gilt jedoch $\Delta U = 0$ in $\partial\Omega$. □

Ab nun sei mit u immer die (bis auf das Vorzeichen eindeutige) normierte Eigenfunktion des Problems (2) zum Eigenwert λ bezeichnet. Um spätere Rechnungen zu vereinfachen ist es günstig, Ω und u so zu skalieren, dass $\Delta u = 1$ in $\partial\Omega$ gilt. Dies kann man durch eine affine Dehnung des Gebiets Ω und Multiplikation von u mit einem passenden Faktor erreichen. Daher gelte im Folgenden stets $\Delta u = 1$ in $\partial\Omega$.

2.2 Notwendige Bedingungen für die Grundschwingung des gestörten optimalen Gebiets

Man betrachtet nun eine Familie $(\Omega_\varepsilon)_\varepsilon$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, die flächengleich zum optimalen Gebiet Ω ist, d. h. nach Definition (2.1) $|\Omega_\varepsilon| = |\Omega| + o(\varepsilon^2)$ für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Für $\varepsilon = 0$ sei $\Omega_0 = \Omega$ und für $\varepsilon \neq 0$ sei Ω_ε von der Form $\Omega_\varepsilon = \{y = x + \mu(x,\varepsilon); x \in \Omega\}$, wobei $\mu(x,\varepsilon)$ durch Definition (2.1) gegeben ist. Man beachte, dass nach Bemerkung (2.2) für ein $x \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} &\mu_\varepsilon(x,\varepsilon) = V\,\nu \quad \text{mit} \quad \int_I V\,ds = 0 \\ \text{und} \qquad &\mu_{\varepsilon\varepsilon}(x,\varepsilon) = W\,\nu \quad \text{mit } W = -\kappa\,V^2. \end{aligned}$$

Auf den Gebieten Ω_ε wird nun die Eigenwertaufgabe (2) betrachtet. Die jeweiligen normierten Eigenfunktionen seien mit $u(\cdot;\varepsilon)$ bezeichnet. Sie erfüllen $u = u(\cdot;\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$ und

(9) $$u(\cdot;\varepsilon) = 0 \;\text{ und }\; \nabla u(\cdot;\varepsilon) = 0 \;\text{ in } \partial\Omega_\varepsilon$$

Es gibt also Eigenwerte $\lambda(\Omega_\varepsilon) > 0$ und Funktionen $u(\cdot;\varepsilon)$ mit $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u(y;\varepsilon)|^2\,dy = 1$, so dass gilt

(10) $$\begin{cases} \Delta^2 u(\cdot;\varepsilon) + \lambda(\Omega_\varepsilon)\,\Delta u(\cdot;\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ u(\cdot;\varepsilon) = 0\,, \quad \nabla u(\cdot;\varepsilon) = 0 & \text{in } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Fasst man die Eigenwerte $\lambda(\Omega_\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)$ als Funktion in ε auf und setzt $\lambda(\Omega)$ als $\lambda(0)$, dann gilt das folgende Lemma.

(2.6) Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen ist*

(11) $$\dot{\lambda}(0) = \left(\frac{d}{d\varepsilon}\lambda(\varepsilon)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

und

(12) $$\ddot{\lambda}(0) = \left(\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\lambda(\varepsilon)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} \geq 0$$

Mithilfe der Funktionen $u\,(\cdot;\varepsilon)$ werden die erste und zweite Variation der Grundschwingung u definiert. Die partiellen Ableitungen von $u(\cdot;\varepsilon)$ nach ε werden im Folgenden mit $u_\varepsilon(\cdot;\varepsilon)$ bezeichnet.

(2.7) Definition. Für $x \in \overline{\Omega}$ ist $\omega(x) := u_\varepsilon(x + \mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0}$ die erste Variation von u. Analog definiert man die zweite Variation von u als $\psi(x) := u_{\varepsilon\varepsilon}(x + \mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0}$.

Der nächste Satz zeigt, dass die erste Variation ω von u in $\partial\Omega$ verschwindet.

(2.8) Satz. *Die erste Variation ω der Grundschwingung u verschwindet auf dem Rand, d. h. es gilt $\omega \equiv 0$ in $\partial\Omega$.*

Beweis. Man entwickelt zunächst $u(y;\varepsilon)$ um $y = x$ und dann um $\varepsilon = 0$. Beachtet man, dass die Ableitungen $\partial_{x_i} u(y;\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ den Ableitungen $\partial_{x_i} u(x)$ entsprechen, so erhält man

$$u(x + \mu(x,\varepsilon);\varepsilon) = u(x) + \varepsilon(\omega(x) + \eta(x).\nabla u(x)) + o(\varepsilon).$$

Für $x \in \partial\Omega$ gilt dann nach (9) $0 = \varepsilon\,\omega(x)$. □

Einige weitere Eigenschaften der Variationen ω und ψ zeigen die folgenden Lemmata, die durch Nachrechnen zu beweisen sind.

(2.9) Lemma. *In Ω gilt*

i) $\Delta^2\omega \; + \lambda(0)\,\Delta\omega = 0$

ii) $\Delta^2\psi \; + \ddot{\lambda}(0)\,\Delta u + \lambda(0)\,\Delta\psi = 0$

(2.10) Lemma. *Für die Grundschwingung u und ihre erste Variation ω gilt*

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\omega\,dx = 0.$$

(2.11) Lemma. *Für die erste Variation ω und die zweite Variation ψ der Grundschwingung u gelten die folgenden Identitäten*

i) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \Delta\omega\,\partial_\nu\omega\,dS = \int_\Omega (\Delta\omega)^2\,dx - \lambda(0)\int_\Omega \omega^2 dx$

ii) $\displaystyle\ddot{\lambda}(0) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\psi - \psi\,\partial_\nu\Delta u\,dS$

Der Eigenwert $\lambda(\varepsilon)$ von Problem (10) lässt sich analog zu Satz (2.3) durch ein Randintegral darstellen. In diesem Fall gilt

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\Delta u(y;\varepsilon))^2 \, y.\nu_\varepsilon dS_\varepsilon(y), \tag{13}$$

wobei ν_ε die äußere Normale an $\partial\Omega_\varepsilon$ ist.

Um im nächsten Abschnitt ein Funktional herleiten zu können, dass die zweite Gebietsvariation des optimalen Gebiets beschreibt, muss der Zusammenhang zwischen der Variaiton ψ sowie den Normalenableitungne $\partial_\nu\omega$ und $\partial_\nu\psi$ und der Darstellung des Gebiets Ω_ε durch $\mu(x,\varepsilon) = \varepsilon\eta(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\zeta(x) + o(\varepsilon^2)$ untersucht werden. Der nächste Satz liefert dies.

(2.12) Satz. *Auf $\partial\Omega$ gilt*

i) $\psi = (\eta.\nu)^2 = V^2$

ii) $\partial_\nu\omega = -\eta.\nu = -V$

iii) $\partial_\nu\psi = -(\eta.\nu)^2 \partial_\nu\Delta u - 2\eta.\nu\Delta\omega = -V^2\partial_\nu\Delta u - 2V\Delta\omega$

Beweis. Zum Beweis von i) betrachtet man die zweite Totalableitung von $u(y;\varepsilon)$ nach ε. Aufgrund der Randbedingungen (9) gilt

$$0 = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} u(y;\varepsilon) = u_{\varepsilon_{y_1}} \partial_\varepsilon y_1 + u_{\varepsilon_{y_2}} \partial_\varepsilon y_2 + u_{\varepsilon\varepsilon}(y;\varepsilon) \quad \text{in } \partial\Omega_\varepsilon.$$

Beachtet man, dass nach (9) auch die Totalableitungen nach ε von u_{y_i} auf $\partial\Omega_\varepsilon$ verschwinden, dann erhält man für $\varepsilon = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\psi = \eta.D^2u.\eta = (\eta.\nu)^2 = V^2$$

Um die Teile ii) und iii) zu beweisen, entwickelt man $u(x+\mu(x,\varepsilon);\varepsilon)$ bis einschließlich der dritten Ordnung um $y = x$ und anschließend um $\varepsilon = 0$. So erhält man eine Darstellung von $u(x + \mu(x,\varepsilon);\varepsilon)$, die nur noch von x abhängt. Diese Darstellung differenziert man nach x_i und multilpliziert mit ν_i. Anschließend summiert man über i und erhält so die Behauptung. Man beachte dabei, dass $\nabla u(x + \mu(x,\varepsilon);\varepsilon)$ auf $\partial\Omega_\varepsilon$ verschwindet. □

Die Kenntnis von $\partial_\nu\omega$ in $\partial\Omega$ ermöglicht es, noch eine weitere Eigenschaft der Variation ω herzuleiten.

(2.13) Folgerung. *Für die erste Variation ω der Grundschwingung u gilt*

$$\int_{\partial\Omega} [\Delta\omega - \partial_\nu\omega\,\partial_\nu\Delta u] \; x.\nu \, dS = 0.$$

Beweis. Auch hier wird der Beweis mittels Taylorentwicklungen geführt. Entwickelt man $(\Delta u(x+\mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon))^2$ um $\varepsilon = 0$, so erhält man

$$(\Delta u(x+\mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon))^2 = (\Delta u)^2 + 2\,\varepsilon\,\Delta u\left[\eta.\nabla\partial_1^2 u + \eta.\nabla\partial_2^2 u + \Delta\omega\right] + o(\varepsilon).$$

Nach Bemerkung (2.2) ist in $\partial\Omega$ $\eta = V\,\nu$, also gilt

$$(\Delta u(x+\mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon))^2 = (\Delta u)^2 + 2\varepsilon[V\partial_\nu\partial_1^2 u + V\partial_\nu\partial_2^2 u + \Delta\omega] + o(\varepsilon)$$

Mit Satz (2.12) ist dies

$$(\Delta u(x+\mu(x,\varepsilon)\,;\varepsilon))^2 = (\Delta u)^2 + 2\varepsilon[\Delta\omega - \partial_\nu\omega\partial_\nu u] + o(\varepsilon)$$

Mit Formel (13) ist dann

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}(\Delta u(y;\varepsilon))^2 y.\nu_\varepsilon\,dS_\varepsilon\\ &= |\Omega| + 2\,\varepsilon\int_{\partial\Omega}[\Delta\omega - \partial_\nu\omega\,\partial_\nu\Delta u]x.\nu\,dS + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Differenziert man dies nach ε und setzt $\varepsilon = 0$, so verschwindet nach (11) die linke Seite. Somit ist

$$0 = \int_{\partial\Omega}[\Delta\omega - \partial_\nu\omega\,\partial_\nu\Delta u]x.\nu\,dS.$$

□

2.3 Das Funktional E

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 wird nun ein Funktional E hergeleitet, das angewendet auf die erste Variation ω der Grundschwingung u die zweite Gebietsvariation des optimalen Gebiets beschreibt.

(2.14) Satz. *Die zweite Variation von $\lambda = \lambda(0)$ erfüllt*

$$\frac{\ddot\lambda(0)}{2} = \int_\Omega(\Delta\omega)^2\,dx - \lambda\int_\Omega|\nabla\omega|^2\,dx - \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu\omega)^2\,\partial_\nu\Delta u\,dS. \tag{14}$$

Beweis. Setzt man in die Formel aus Satz (2.11)ii) die Erkenntnisse aus Satz (2.12) ein, so erhält man

$$\ddot\lambda(0) = \int_{\partial\Omega}\partial_\nu\omega\,\Delta\omega - (\partial_\nu\omega)^2\,\partial_\nu\Delta u\,dS$$

Mit Lemma (2.11)i) ist dies äquivalent zu

$$\frac{\ddot\lambda(0)}{2} = \int_\Omega(\Delta\omega)^2\,dx - \lambda\int_\Omega|\nabla\omega|^2\,dx - \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu\omega)^2\,\partial_\nu\Delta u\,dS.$$

□

Die rechte Seite in (14) wird mit $E(\omega)$ bezeichnet. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3 ist also

$$E(\omega) = P(\omega) - \lambda\, D(\omega) - \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \omega)^2 \partial_\nu \Delta u \, dS.$$

(2.15) Bemerkung. *Man beachte, dass ω die erste Variation der Grundschwingung u nach Definition (2.7) ist. Für diese ω gilt nach Formel* (12) $E(\omega) \geq 0$. *In Kapitel 3 wird $E(\omega)$ für eine allgemeinere Klasse von Funktionen betrachtet.*

(2.16) Bemerkung. *Anders formuliert lautete die Aussage von Satz (2.14)*

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda(\Omega_\varepsilon) \right] \Big|_{\varepsilon=0} = E(u_\varepsilon(x + \varepsilon\, \eta(x) + o(\varepsilon); \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}),$$

wobei $\Omega_\varepsilon = \{x + \varepsilon\, \eta(x) + o(\varepsilon); x \in \Omega\}$ ist. Diese Formulierung wird in Abschnitt 4.2 benötigt.

Mittels partieller Integration und den Formeln (5) und (6) kann man eine alternative Darstellung des Funktionals E erhalten. Diese Darstellung wird spätere Abschätzungen vereinfachen.

(2.17) Korollar. *Alternativ kann man E darstellen als*

$$E(\omega) = J(\omega) - \lambda\, D(\omega) - \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \omega)^2\, \partial_\nu^3 u \, dS.$$

Da $\ddot{\lambda}(0)$ die zweite Gebietsvariation des optimalen Gebiets Ω ist, zeigt Satz (2.14), dass die zweite Gebietsvariation lediglich von der ersten Variation der Grundschwingung u abhängt. Später werden Funktionen ω mit $E(\omega) = 0$ von Interesse sein (siehe Beginn Kapitel 3). Der nächste Satz liefert drei erste Funktionen ω, für die dies gilt.

(2.18) Satz. *Für $\omega = u_{x_1}$, $\omega = u_{x_2}$ oder $\omega = x_2\, u_{x_1} - x_1\, u_{x_2}$ ist $E(\omega) = 0$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass u_{x_1}, u_{x_2} und $x_2\, u_{x_1} - x_1\, u_{x_2}$ erste Variationen von u aus Gebietsvariationen sind, die die Form von $\partial\Omega$ nicht verändern. Denn da die Grundfrequenz von der Gestalt des Randes abhängt, gilt dann $\lambda(\varepsilon) \equiv \lambda(0)$ und so $\ddot{\lambda}(0) = 0$. Solche Gebietsvariationen sind zum Beispiel infinitesimale Translationen von Ω in x_1- oder x_2-Richtung oder eine infinitesimale Drehung von Ω um den Ursprung. Dem würden die Variationen

$$x \mapsto x - \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto x - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad x \mapsto x - \varepsilon \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

entsprechen. Bildet man unter diesen Gebietsvariationen die erste Variation von u, so erhält man $\omega = u_{x_1}$, $\omega = u_{x_2}$ bzw. $\omega = x_2\, u_{x_1} - x_1\, u_{x_2}$. Für diese ω gilt nach Satz (2.14) $E(\omega) = \frac{\ddot{\lambda}(0)}{2} = 0$. □

(2.19) Bemerkung. *Die partiellen Ableitungen der Grundschwingung u sind linear unabhängig. Denn angenommen, es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, mit $u_{x_1} = a\, u_{x_2}$. Dann wäre auch $\nabla u_{x_1} = a\, \nabla u_{x_2}$ und damit wären auch die Normalenableitungen $\partial_\nu u_{x_1}$ und $\partial_\nu u_{x_2}$ linear abhängig. Das kann aber nach (7) nicht sein.*

3 Die zweite Gebietsvariation

Um zu zeigen, dass das Gebiet mit der tiefsten Grundfrequenz eindeutig ist, muss nach anderen Gebieten gesucht werden, die dieselbe Grundfrequenz wie das optimale Gebiet besitzen. Analog zur Theorie der reellen Funktionen werden daher Funktionen v gesucht, für die $E(v) > 0$ gilt. Dazu wird das Funktional E in einer Klasse $\mathcal{Z}$ von zulässigen Funktionen minimiert. Es wird sich dabei herausstellen, dass in der Klasse $\mathcal{Z}$ $E(v) \geq 0$ gilt. Da die Existenz eines optimalen Gebiets vorausgesetzt ist, muss dann für Funktionen v, die für Gebiete mit dem tiefsten Grundton stehen, $E(v) = 0$ gelten. Um auf die Eindeutigkeit des optimalen Gebiets zu schließen wird dann die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $E(v) = 0$ in $\mathcal{Z}$ untersucht. Die Anzahl dieser linear unabhängigen Lösungen entspricht der Vielfachheit des Eigenwerts Null des Eigenwertproblems für die zweite Gebietsvariation.

3.1 Die Funktionenklasse $\mathcal{Z}$ und Minimalfolgen zum Funktional E

Nach Bemerkung (2.15) gilt für alle ersten Variationen ω der Grundschwingung u $E(\omega) \geq 0$. Die Funktionenklasse $\mathcal{Z}$ soll deswegen so konstruiert werden, dass diese ersten Variationen in $\mathcal{Z}$ enthalten sind. Daher werden die Eigenschaften der Funktionen ω

$$\omega = 0 \text{ in } \partial\Omega\,, \quad \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \omega \, dS = 0 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla \omega \, dx = 0$$

in die Klasse $\mathcal{Z}$ übernommen. Da später die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $\omega \in \mathcal{Z}$ mit $E(\omega) = 0$ von Interesse ist, schließt man aus, dass $\omega \equiv 0$ in $\mathcal{Z}$ liegt. Dazu nimmt man die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \omega)^2 dS > 0$$

in $\mathcal{Z}$ auf. Dies schließt $\partial_\nu \omega = 0$ in $\partial\Omega$ aus, was auf $\omega \equiv 0$ in Ω führen würde.

(3.1) Definition.

i) Mit $\mathcal{Z}$ wird die folgende Teilmenge von $H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ bezeichnet

$$\mathcal{Z} = \{ f \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)\,; \int_{\partial\Omega} \partial_\nu f \, dS = 0, \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu f)^2 \, dS > 0, \int_\Omega \nabla u . \nabla f \, dx = 0 \}.$$

Dabei ist $u \in H_0^{2,2}(\Omega)$ die erste normierte Eigenfunktion von Problem (1).

ii) Streicht man aus $\mathcal{Z}$ die Bedingungen

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu f)^2\, dS > 0 \text{ und } \int_\Omega \nabla u.\nabla f\, dx = 0,$$

erhält man die Klasse $\mathcal{Z}^*$.

Der nächste Satz liefert ein Hilfsmittel, das benutzt wird, um auf die Konvergenz einer Minimalfolge $\{\varphi_n\}_n$ zum Funktional E zu schließen. Dazu wird die folgende Bezeichnung benötigt.

(3.2) Bezeichnung. *Seien f und v aus $H^{2,2}(\Omega)$, dann ist*

$$E'(f)v := \left(\frac{d}{d\varepsilon} E(f + \varepsilon\, v)\right)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Der folgende Satz ist [2], S. 486, entnommen. Dort wird er für allgemeine quadratische Funktionale bewiesen.

(3.3) Satz. *Sei $R \subseteq \mathcal{Z}$ eine Menge von Funktionen, so dass $\min_R E > -\infty$ ist, und sei $\{f_n\}_n$ eine Minimalfolge zum Funktional E in R, d. h. $\lim_{n\to\infty} E(f_n) = \min_{f\in R} E(f) = m > -\infty$. Dann gilt*

$$E(f_n - f_m) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Minimiert man das Funktional E in der Klasse $\mathcal{Z}$ mit Hilfe von Minimalfolgen $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{Z}$, so können prinzipiell die folgenden zwei Fälle eintreten

i) $d(\varphi_n) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \varphi_n)^2 dS \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) $d(\varphi_n) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \varphi_n)^2 dS \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Der Fall i) führt allerdings auf die unerwünschte Nulllösung. Daher werden im Folgenden nur Minimalfolgen $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{Z}$ betrachtet, für die der Fall ii) gilt. Nun ist es möglich, die Minimalfolgen in der Normierung

$$d(\varphi_n) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \varphi_n)^2 dS = 1$$

zu betrachten. Die Minimierung des Funktionals E ist daher von nun an äquivalent mit der folgenden Minimierungsaufgabe

$$\min_{v\in\mathcal{Z}} \frac{E(v)}{d(v)} = \min_{v\in\mathcal{Z}} \frac{\int_\Omega (\Delta v)^2 dx - \lambda \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu v)^2 \partial_\nu \Delta u\, dS}{\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu v)^2 dS} = \rho. \tag{15}$$

Nimmt man zusätzlich an, dass gilt

$$\min_{\mathcal{Z}} E > -\infty \quad \text{und} \quad D(\varphi_n) := \int_\Omega |\nabla\varphi_n|^2\, dx \le C_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

dann existiert eine Grenzfunktion φ der Folge $\{\varphi_n\}_n$ in $H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$.

(3.4) Satz. *Sei $\{\varphi_n\}_n$ eine Minimalfolge zu E in $\mathcal{Z}$ mit $d(\varphi_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelten die zusätzlichen Voraussetzungen (16). Dann gibt es ein $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^{2,2}(\Omega)} = 0$.*

Beweis. Da nach Voraussetzung $E(\varphi_n)$, $D(\varphi_n)$ und $d(\varphi_n)$ beschränkt sind, ist auch $J(\varphi_n)$ beschränkt. Damit ist die Folge $\{\nabla\varphi_n\}_n$ in $H^{1,2}(\Omega)$ beschränkt und es gibt eine Teilfolge $\{\nabla\varphi_n\}_n$, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Damit konvergieren auch $D(\varphi_n - \varphi_m)$, $J(\varphi_n - \varphi_m)$ und $H(\varphi_n - \varphi_m)$ für $m, n \to \infty$ gegen Null. $\{\varphi_n\}_n$ ist damit eine Cauchy-Folge in $H^{2,2}(\Omega)$ und $H_0^{1,2}(\Omega)$. Es gibt also ein $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - \varphi\|_{H^{2,2}(\Omega)}$. □

(3.5) Bemerkung. *Satz (3.4) gilt nicht nur für Minimalfolgen, sondern auch für normierte Folgen $\{f_n\}_n \in \mathcal{Z}$, für die $E(f_n)$ beschränkt ist, denn im Beweis dieses Satzes wird nur die Beschränktheit der Folge $\{E(f_n)\}_n$ benötigt.*

Wie das nächste Lemma zeigt, liegt die Grenzfunktion aus Satz (3.4) wieder in $\mathcal{Z}$.

(3.6) Lemma. *Es gelten die Voraussetzungen zu Satz (3.4). Dann ist die Grenzfunktion $\varphi \in \mathcal{Z}$ und erfüllt $\|\partial_\nu\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = d(\varphi) = 1$.*

Beweis. Es werden die drei Eigenschaften

$$a)\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi\, dx = 0\,, \quad b)\int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi\, dS = 0 \quad \text{und} \quad c)\ d(\varphi) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu\varphi)^2\, dS = 1$$

durch Nachrechnen gezeigt. □

Der nächste Satz zeigt, dass die Grenzfunktion φ aus Satz (3.4) ein Minimierer des Funktionals E ist.

(3.7) Satz. *Sei $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{Z}$ eine Minimalfolge zum Funktional E mit $d(\varphi_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelten die Annahmen* (16)*. Dann gilt für die nach Satz (3.4) existierende Grenzfunktion $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$*

$$\lim_{n\to\infty} E(\varphi_n) = E(\varphi)\,.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung φ der $H^{2,2}(\Omega)$-Grenzwert der Folge $\{\varphi_n\}_n$ ist, folgt sofort

$$D(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} D(\varphi) \quad \text{und} \quad J(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} J(\varphi).$$

Es muss also gezeigt werden, dass auch der dritte Summand von $E(\varphi_n)$ gegen den dritten Summanden von $E(\varphi)$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \varphi_n)^2\, \partial_\nu^3 u \, dS - \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \varphi)^2\, \partial_\nu^3 u \, dS \right| \\
\leq \quad & \max_{\partial\Omega} \left|\partial_\nu^3 u\right| \int_{\partial\Omega} \left| (\partial_\nu \varphi_n)^2 - (\partial_\nu \varphi - \partial_\nu \varphi_n + \partial_\nu \varphi_n)^2 \right| dS \\
\leq \quad & 3 \max_{\partial\Omega} \left|\partial_\nu^3 u\right| d(\varphi_n - \varphi)
\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite gegen Null konvergiert. Damit ist $\lim_{n\to\infty} E(\varphi_n) = E(\varphi)$. □

(3.8) Bemerkung. *Da $H^{2,2}(\Omega)$ kompakt in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ eingebettet ist für $0 \leq \alpha < 1$, ist die Konvergenz der Minimalfolge $\{\varphi_n\}_n$ gegen den Minimierer φ gleichmäßig.*

3.2 Die Eigenwertaufgabe für die zweite Gebietsvariation

Da nun bekannt ist, in welchem Sinn eine Minimalfolge zum Funktional E konvergiert, kann die Aufgabe (15) gelöst werden. Sei also $\{\varphi_n\}_n$ eine Folge in $\mathcal{Z}$ mit $d(\varphi_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\rho = \inf_{v\in\mathcal{Z}} \frac{E(v)}{d(v)} = \lim_{n\to\infty} E(\varphi_n)$$

gilt. Um die Sätze aus Abschnitt 3.1 anwenden zu können, müssen zunächst die dort zusätzlich getroffenen Annahmen (16) gerechtfertigt werden.

(3.9) Satz. *Das Infimum ρ des Quotienten $\frac{E(v)}{d(v)}$ über alle $v \in \mathcal{Z}$ ist endlich.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Sei $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{Z}$ eine Minimalfolge mit $d(\varphi_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es ist $\inf_{\mathcal{Z}} E = -\infty$. Dann muss $D(\varphi_n)$ für eine Teilfolge der $\{\varphi_n\}_n$ gegen ∞ konvergieren. Um eine Folge zu erhalten, für die E gegen einen endlichen Wert konvergiert, definiert man

$$\varphi_n^* := \frac{\varphi_n}{\sqrt{D(\varphi_n)}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $E(\varphi_n^*)$ gilt dann $E(\varphi_n^*) \geq -\lambda - \max_{\partial\Omega} \left|\partial_\nu^3 u\right| = C$. Auf der Menge $\mathcal{M} = \{\varphi_n^*; n \in \mathbb{N}\}$ ist $\{\varphi_n^*\}_n$ eine Minimalfolge zum Funktional E. Satz (3.3), angewendet auf der Menge $\mathcal{M}$, liefert dann $E(\varphi_n^* - \varphi_m^*) \to 0$. Analog zu Satz (3.4) existiert somit ein $\varphi^* \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ mit $\varphi_n^* \to \varphi^*$ in $H^{2,2}(\Omega)$. Zudem gilt $\lim_{n\to\infty} E(\varphi_n^*) = E(\varphi^*)$. Es muss weiterhin $E(\varphi^*) < 0$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität des Eigenwerts λ. □

(3.10) Korollar. *Sei* $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{Z}$ *eine Minimalfolge zum Funktional* E *mit* $d(\varphi_n) = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein* $C_1 > 0$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$D(\varphi_n) = \|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1.$$

Beweis. Man nimmt an, es gilt $\lim_{n\to\infty} D(\varphi_n) = \infty$ für eine Teilfolge der φ_n und führt diese Annahme analog zum Beweis von Satz (3.9) zum Widerspruch. □

Damit sind die Annahmen (16) für Minimalfolgen mit $d(\varphi_n) = 1$ gerechtfertigt und man kann (15) lösen. Sei dazu $\{\varphi_n\}_n$ eine Minimalfolge zu $\frac{E}{d}$ in $\mathcal{Z}$ mit $d(\varphi_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach Korollar (3.10) $D(\varphi_n) < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach Satz (3.9) ist $\lim_{n\to\infty} E(\varphi_n) > -\infty$. Der Satz (3.4) liefert somit eine Grenzfunktion $\varphi \in H^{1,2}_0(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ mit $d(\varphi) = 1$, die nach Lemma (3.6) ein Element aus $\mathcal{Z}$ ist. Außerdem liefert Satz (3.7)

$$\frac{E(\varphi)}{d(\varphi)} = \min_{v\in\mathcal{Z}} \frac{E(v)}{d(v)} = \rho \tag{17}$$

Dies liefert die folgenden Euler-Lagrange-Gleichungen.

(3.11) Lemma. *Die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Variationsproblem (15) lauten*

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi \ + \lambda\,\Delta\varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \Delta\varphi - \partial_\nu\varphi\,\partial_\nu\Delta u - \rho\,\partial_\nu\varphi = \beta \quad \text{in } \partial\Omega \\ \varphi = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

Dabei ist β *eine Konstante.*

(3.12) Folgerung. *Sei* φ *ein Minimierer gemäß (17), dann gilt für alle* $\vartheta \in \mathcal{Z}^*$

$$E'(\varphi)\vartheta = 0.$$

Der nächste Satz zeigt, dass das Minimum ρ in (17) Null ist.

(3.13) Satz. *Das Minimum* ρ *von* $\dfrac{E(v)}{d(v)}$ *über alle* $v \in \mathcal{Z}$ *ist Null.*

Beweis. Sei φ ein Minimierer gemäß (17). Da $\varphi \in \mathcal{Z}$ ist, gilt für $V(s) := -\partial_\nu\varphi(\gamma(s))$ $\int_I V\,ds = 0$. Man wählt nun μ in Definition (2.1) so, dass in $\partial\Omega$ $\mu = \varepsilon\,V\,\nu + o(\varepsilon)$ ist, und führt mit diesem μ eine Gebietsvariation nach (2.1) durch. Die durch diese Gebietsvariation erhaltene erste Variation ω von u ist ein Element aus $\mathcal{Z}$. Da ω durch V eindeutig bestimmt wird, ist $\omega = \varphi$. Damit gilt insbesondere nach Bemerkung (2.15) $E(\varphi) \geq 0$. Nach Satz (2.18) ist mit u_{x_1} bereits ein Element aus $\mathcal{Z}$ mit $E(u_{x_1}) = 0$ bekannt. Also muss $\rho = E(\varphi) = 0$ aufgrund der Minimalität von $E(\varphi)$ gelten. □

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen (18) wird der folgende elliptische Operator definiert.

(3.14) Definition. Der elliptische Operator $L : \mathcal{Z} \to L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ ist geben durch

$$L\varphi = (\Delta^2\varphi \; + \lambda\,\varphi,\; \varphi,\; \Delta\varphi - \partial_\nu\varphi\,\partial_\nu\Delta u - \rho\,\partial_\nu\varphi).$$

Nach Satz (3.13) ist der erste Eigenwert ρ_1 des Operators L Null. Der Minimierer φ aus (17) ist die zugehörige erste Eigenfunktion.

3.3 Eigenschaften der Eigenfunktionen des Operators L

In diesem Abschnitt werden die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators L untersucht. Für den ersten Eigenwert ρ_1 gilt nach Abschnitt 3.2 $\rho_1 = 0$. Die erste Eigenfunktion φ_1 ist der Minimierer aus (17). Die höheren Eigenwerte ρ_i und die entsprechenden Eigenfunktionen φ_i erhält man, indem man der Minimierungsaufgabe (17) weitere Nebenbedingungen hinzufügt. Wie diese Nebenbedingungen lauten müssen, zeigt das nächste Lemma.

(3.15) Lemma. *Seien φ_k und φ_l Eigenfunktionen des Operators L zu verschiedenen Eigenwerten ρ_k bzw. ρ_l. Dann gilt*

$$d(\varphi_k, \varphi_l) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi_k\,\partial_\nu\varphi_l\,dS = 0.$$

Beweis. Seien $\varphi_k, \varphi_l \in \mathcal{Z}$ Eigenfunktionen des Operators L zu den Eigenwerten ρ_k bzw. ρ_l. Es gelte $\rho_k \neq \rho_l$. Man stellt Null dar als

$$0 = \lambda\big[\int_\Omega \nabla\varphi_k.\nabla\varphi_l\,dx - \int_\Omega \nabla\varphi_k.\nabla\varphi_l\,dx\big]$$

und erhält die Behauptung mittels partieller Integration und den Eigenschaften der Eigenfunktionen φ_k und φ_l. □

Der i-te Eigenwert ρ_i des Operators L ist damit

(19) $$\rho_i = \min_{\substack{v\in\mathcal{Z}\\ v\neq 0\\ d(v,\varphi_k)=0}} \frac{E(v)}{d(v)} = \frac{E(\varphi_i)}{d(\varphi_i)}.$$

Die i-te Eigenfunktion ist der Minimierer φ_i aus (19). Man erhält φ_i durch analoge Betrachtungen wie in Abschnitt 3.2. Weiterhin gilt $\rho_i \leq \rho_{i+1}$, da der höhere Eigenwert das Minimum des Funktionals $\frac{E}{d}$ über einer kleineren Menge von Funktionen ist. Damit erhält man ein Spektrum

(20) $$0 = \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq \ldots$$

von Eigenwerten mit den zugehörigen Eigenfunktionen φ_i. Mit den gleichen Überlegungen, die zu Satz (3.11) bzw. Folgerung (3.12) geführt haben, erkennt man die folgenden Eigenschaften der Eigenfunktionen φ_i.

(3.16) Satz. *Für die Eigenfunktionen φ_i, $i \geq 1$, des Operators L zum jeweiligen Eigenwert ρ_i gilt*

i)

$$
\begin{cases}
\Delta^2 \varphi_i \; + \lambda\, \Delta \varphi_i = 0 \quad \text{in } \Omega \\
\Delta \varphi_i - \partial_\nu \varphi_i \, \partial_\nu \Delta u - \rho_i \, \partial_\nu \varphi_i = const. =: \beta_i \quad \text{in } \partial\Omega \\
\varphi_i = 0 \quad \text{in } \partial\Omega
\end{cases}
\tag{21}
$$

ii) $d(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}$ *und* $E(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}\, \rho_i$

iii) $\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi_i \, dx = 0$ *und* $\int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi_i \, dS = 0$

Der nächste Satz zeigt, dass die Vielfachheit des Eigenwerts Null des Operators L mindestens zweifach ist.

(3.17) Satz. *Der zweite Eigenwert ρ_2 des Operators L ist Null.*

Beweis. Nach (20) ist $0 = \rho_1 \leq \rho_2$. Da nach Satz (2.18) E für die beiden, nach Bemerkung (2.19), linear unabhängigen Funktionen u_{x_1} und u_{x_2} verschwindet, muss der Eigenraum zum Eigenwert Null mindestens zweidimensional sein. Somit muss auch $\rho_2 = 0$ gelten. □

Um zu zeigen, dass die Vielfachheit des Eigenwerts Null endlich ist, wird eine Charakterisierung der Eigenfunktionen zum Eigenwert Null hergeleitet. Das folgende Lemma wird dabei benötigt.

(3.18) Lemma. *Sei φ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\rho = 0$, dann gilt in $\partial\Omega$*

$$\Delta \varphi - \partial_\nu \varphi \, \partial_\nu \Delta u = 0$$

Beweis. Da $\rho = 0$ gilt, ist nach Satz (3.16) $\Delta \varphi - \partial_\nu \varphi \, \partial_\nu \Delta u = const. = \beta$. Wie man im Beweis zu Satz (3.13) gesehen hat, ist φ die erste Variation von u unter einer Gebietsvariation mit $V(s) := -\partial_\nu \varphi(\gamma(s))$. Somit gilt nach Folgerung (2.13)

$$0 = \int_{\partial\Omega} [\Delta \varphi - \partial_\nu \varphi \, \partial_\nu \Delta u] x.\nu \, dS = \beta \int_{\partial\Omega} x.\nu \, dS = 2\beta \, |\Omega| \, .$$

Das kann aber nur für $\beta = 0$ gelten. □

Damit kann man die Eigenfunktionen des Operators L zum Eigenwert Null folgendermaßen charakterisieren.

(3.19) Charakterisierung der Eigenfunktionen. *Sei $\varphi \in \mathcal{Z}$. Dann ist φ genau dann eine Eigenwert des Operators L zum Eigenwert Null, wenn φ im Kern des Operators T liegt, wobei*

$$T : \mathcal{Z} \to L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega), \quad T\varphi := (\Delta^2\varphi \; + \lambda\,\Delta\varphi,\, \varphi,\, \Delta\varphi - \partial_\nu\varphi\,\partial_\nu\Delta u)$$

ist.

(3.20) Bemerkung. *Als Lösung der Gleichungen (21) ist ein Element aus* $\operatorname{Kern}(T)$ *analytisch in Ω und aufgrund der Analytizität des Randes $\partial\Omega$ auch analytisch in $\overline{\Omega}$.*

Die Charakterisierung (3.19) ermöglicht es zu zeigen, dass die Vielfachheit des Eigenwerts Null des Operators L endlich ist.

(3.21) Satz. *Der Eigenwert $\rho = 0$ des Operators L hat endliche Vielfachheit, d. h. es ist $2 \leq q < \infty$.*

Beweis. Nach Satz (3.19) genügt es zu zeigen, dass der Kern des Operators T endlichdimensional ist. T ist ein elliptischer Operator, dessen Kern nach dem Hauptsatz über elliptische Operatoren (siehe z. B. [9], Satz 13.1) endliche Dimension hat. Also ist $q < \infty$. □

Aus Lemma (3.18) bzw. der sich daran anschließenden Charakterisierung (3.19) ergeben sich zwei weitere Eigenschaften der Elemente aus $\operatorname{Kern}(T)$, die an späterer Stelle noch einmal wichtig werden. Der Beweis erfolgt durch partielle Integration.

(3.22) Lemma. *Sei φ eine Eigenfunktion des Operators L zum Eigenwert Null. Dann gilt*

i) Für alle $\vartheta \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ ist $E'(\varphi)\vartheta = 0$

ii) Es gilt für alle $\vartheta \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi[\Delta^2\vartheta \; + \lambda\,\Delta\vartheta]\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi\,[\Delta\vartheta - \partial_\nu\vartheta\,\partial_\nu\Delta u]dS = 0$$

Aus der Analytizität von $\partial\Omega$ folgt noch eine weitere Eigenschaft für Funktionen aus $\operatorname{Kern}(T)$.

(3.23) Satz. *Sei φ ein Element aus* $\operatorname{Kern}(T)$ *mit $\varphi \not\equiv 0$. Dann ist die Normalenableitung $\partial_\nu \varphi$ auf keinem Teilbogen von $\partial\Omega$ konstant Null, d. h. $\partial_\nu \varphi \not\equiv 0$ für alle $\Sigma \subset \partial\Omega$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Angenommen es gilt $\partial_\nu \varphi = 0$ in einem Teilstück Σ von $\partial\Omega$. Spiegelt man φ gerade an dem Randstück Σ, so erkennt man, dass $\partial_\nu^k \varphi$ auf Σ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ verschwindet. Entwickelt man φ um $x_0 \in \Sigma$, dann verschwindet φ in einer Umgebung von x_0. Aufgrund der Analytizität muss also $\varphi \equiv 0$ gelten. □

Aus diesem Satz kann man eine erste Aussage über die Gestalt von $\partial\Omega$ folgern.

(3.24) Korollar. *Der Rand des optimalen Gebiets Ω enthält kein geradliniges Stück, d. h. auf keinem Teilstück von $\partial\Omega$ gilt $\kappa = 0$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Angenommen Σ ist ein geradliniger Teilbogen von $\partial\Omega$. Ohne Einschränkung kann man weiter annehmen, dass Σ parallel zur x_1-Achse liegt. Für die Eigenfunktion $\varphi = u_{x_1}$ mit $\partial_\nu \varphi = \cos\alpha$ (nach Bemerkung (7)) gilt auf Σ $\partial_\nu \varphi = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $u_{x_1} \not\equiv 0$. □

3.4 Die Annahme $q = 2$

Der vorangegangene Abschnitt wurde bewiesen, dass die Vielfacheit q des Eigenwerts Null des Operators L $2 \leq q < \infty$ erfüllt. Dieser Abschnitt zeigt, dass unter der Annahme $q = 2$ der Rand des optimalen Gebiets eine Kreislinie ist. Um den Beweis der Eindeutigkeit der Rayleigh'schen Vermutung abzuschließen, muss also noch gezeigt werden, dass q wirklich genau 2 ist. Dies geschieht mit Hilfe eines Widerspruchbeweises in Kapitel 4.
Das folgende Lemma ist entscheidend, um im Fall $q = 2$ auf einen kreisförmigen Rand zu schließen.

(3.25) Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\gamma \in C^2\big(I, \mathbb{R}^2\big)$ die Parametrisierung des Randes. Gilt $\gamma(s).\dot{\gamma}(s) = 0$ für alle $s \in I$, dann ist γ die Parametrisierung eines Kreises um den Ursprung.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|\gamma(s)|^2 = \gamma(s).\gamma(s)$ für alle $s \in I$ konstant ist. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{d}{ds}\gamma(s).\gamma(s) = 2\,\dot{\gamma}(s).\gamma(s) = 0$$

für alle $s \in I$. Also ist $|\gamma|$ konstant in I und γ damit die Parametrisierung eines Kreises um den Ursprung. □

(3.26) Satz. *Hat der Eigenwert Null des Operators L die Vielfachheit $q = 2$, dann ist der Rand $\partial\Omega$ eine Kreislinie.*

Beweis. Nach Satz (2.18) sind u_{x_1}, u_{x_2} und $x_2\, u_{x_1} - x_1\, u_{x_2}$ Eigenfunktionen zum Eigenwert Null. Da nach Annahme Kern(T) zweidimensional ist und nach Bemerkung (2.19) u_{x_1} und u_{x_2} linear unabhängig sind, kann man Kern(T) als span$\{u_{x_1}, u_{x_2}\}$ auffassen. Also gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} & x_2\, u_{x_1} - x_1\, u_{x_2} && = b\, u_{x_1} - a\, u_{x_2} \\ (*) \qquad \Leftrightarrow \quad & (x_2 - b) u_{x_1} - (x_1 - a) u_{x_2} && = 0 \end{aligned}$$

in Ω gilt. Wählt man als neuen Ursprung des Koordinatensystems den Punkt (a, b), dann hat ein Punkt (x_1, x_2) die neuen Koordinaten $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (x_1 - a, x_2 - b)$. Für die Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 gilt in den neuen Koordinaten

$$u_{x_1} = \partial_{x_1} \tilde{x}_1\, u_{\tilde{x}_1} + \partial_{x_1} \tilde{x}_2\, u_{\tilde{x}_2} = u_{\tilde{x}_1}$$

und analog $u_{x_2} = u_{\tilde{x}_2}$. Damit ist $(*)$ äquivalent zu $\tilde{x}_2\, u_{\tilde{x}_1} - \tilde{x}_1\, u_{\tilde{x}_2} = 0$ in Ω. In $\overline{\Omega}$ verschwindet dann $\omega := \tilde{x}_2\, u_{\tilde{x}_1} - \tilde{x}_1\, u_{\tilde{x}_2}$ und damit ist auch $\nabla\omega = 0$ in $\overline{\Omega}$. Auch die Normalenableitung $\partial_\nu \omega$ verschwindet in $\partial\Omega$. Das ist nach Satz (2.18) und (7) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -\tilde{x}_1\, \sin\alpha + \tilde{x}_2\, \cos\alpha = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \\ (22) \qquad \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dabei ist $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$ der Ortsvektor vom Ursprung des neuen Koordinatensystems zu einem Punkt in $\partial\Omega$ und $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ ist der Tangentenvektor an diesen Randpunkt. Der Ortsvektor jedes Punktes in $\partial\Omega$ ist nach (22) orthogonal zum entsprechenden Tangentialvektor. Damit ist $\partial\Omega$ nach Lemma (3.25) eine Kreislinie. $\square$

Kann man also ausschließen, dass $q \geq 3$ ist, dann ist die Eindeutigkeit für die Rayleigh'sche Vermutung für die gebeulte Platte in zwei Dimensionen hiermit bewiesen.

4 Widerspruch zur Annahme $q \geq 3$

Dieses Kapitel zeigt über einen Widerspruchsbeweis, dass die Vielfachheit des Eigenwerts Null des Operators L genau zweifach ist. Dann ist der Beweis nach Abschnitt 3.4 vollständig. Es soll daher ab nun die Annahme $q \geq 3$ gelten.
Ein wichtiges Hilfsmittel, um diese Annahme zu widerlegen, sind Gebietsvariationen, die ein Teil des Randes nicht verändern. Diese starren Gebietsvariationen werden in Abschnitt 4.1 definiert. Dort wird auch die neue Klasse von Funktionen $\mathcal{Z}_\Sigma$ eingeführt und das Variationsproblem für $\ddot{\lambda}(0)$ auf dieser Klasse betrachtet. Der Abschnitt 4.2 beschäftigt sich mit dem Minimum $\hat{\rho}(h)$ des Variationsproblems aus 4.1. Es wird sich zeigen, dass dieses Minimum gegen Null konvergiert, wenn die Länge des starren Randstückes gegen Null konvergiert. Das Verhalten der entsprechenden Eigenfunktionen $\hat{\varphi}_h$ wird in Abschnitt 4.3 untersucht. Mit Hilfe von Taylor-Entwicklungen von $\hat{\rho}(h)$ und $\hat{\varphi}(h)$ stößt man dann auf einen Widerspruch, womit die Annahme $q \geq 3$ widerlegt ist.

4.1 Starre Gebietsvariationen

(4.1) Definition. Sei Σ ein Teilbogen von $\partial\Omega$ und $\hat{\eta} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, so dass für $\widehat{V} \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ mit $\hat{\eta} = \widehat{V}\,\nu$ in $\partial\Omega$ gilt $\quad \widehat{V} = 0$ in $I_\Sigma := \{s \in I; \gamma(s) \in \Sigma\}$.
Dann heißt die über die Variation $\widehat{\Phi}_\varepsilon(x) = x + \hat{\mu}(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\,\hat{\eta}(x) + o(\varepsilon)$ definierte Gebietsvariation eine in Σ starre Gebietsvariation.

Solche starren Gebietsvariationen sind lediglich ein spezieller Typ der schon betrachteten Gebietsvariationen. Daher übertragen sich alle Ergebnisse aus Kapitel 2. Allerdings müssen auf dem starren Randstück die Randwerte angepasste werden.
Sei zum Beispiel $\hat{\omega} := u_\varepsilon(x + \hat{\mu}(x,\varepsilon); \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$ die erste Variation von u (vgl. Definition (2.7)) unter einer starren Gebietsvariation. Es gilt dann

$$\partial_\nu \hat{\omega} = -\widehat{V} \;\text{ in } \partial\Omega \setminus \Sigma \quad \text{und} \quad \partial_\nu \hat{\omega} = 0 \;\text{ in } \Sigma.$$

Nimmt man die Bedingung $\partial_\nu f = 0$ in Σ in die Funktionenklasse $\mathcal{Z}$ auf, so erhält man die Klasse $\mathcal{Z}_\Sigma$.

(4.2) Definition. Sei Σ ein Teilstück des Randes $\partial\Omega$. Dann ist

$$\mathcal{Z}_\Sigma := \{f \in \mathcal{Z};\ \partial_\nu f = 0 \,\text{in}\, \Sigma\}$$

eine von Σ abhängige Unterklasse von $\mathcal{Z}$.

Betrachtet man das Eigenwertproblem für $\ddot{\lambda}(0)$ auf der Klasse $\mathcal{Z}_\Sigma$, so erhält man das folgende Minimierungsproblem

$$\min_{f \in \mathcal{Z}_\Sigma} \frac{E(f)}{\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu f)^2\, dS} = \hat{\rho}_\Sigma. \tag{23}$$

Mit den gleichen Überlegungen wie in Kapitel 3.2 erhält man zu einer Minimalfolge $\{\hat{\varphi}_n\}_n \subset \mathcal{Z}_\Sigma$ eine Grenzfunktion $\hat{\varphi}_\Sigma \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$. Weiterhin konvergiert $\partial_\nu \hat{\varphi}_n$ in $L^2(\partial\Omega)$ gegen $\partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma$. Daher konvergiert $\partial_\nu \hat{\varphi}_n$ in $L^2(\Sigma)$ gegen $\partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma$ und somit ist $\partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma = 0$ in Σ fast überall. Aus Stetigkeitsgründen ist somit $\hat{\varphi}_\Sigma$ ein Element aus $\mathcal{Z}_\Sigma$. Der Minimierer $\hat{\varphi}_\Sigma$ erfüllt die Gleichungen (vgl. Satz (3.16)i))

$$\begin{cases} \Delta^2 \hat{\varphi}_\Sigma + \lambda\, \Delta \hat{\varphi}_\Sigma = 0 & \text{in } \Omega \\ \hat{\varphi}_\Sigma = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ \Delta \hat{\varphi}_\Sigma - \partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma\, \partial_\nu \Delta u - \hat{\rho}_\Sigma\, \partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma = \hat{\beta}_\Sigma & \text{in } \partial\Omega \setminus \Sigma \\ \partial_\nu \hat{\varphi}_\Sigma = 0 & \text{in } \Sigma \end{cases} \tag{24}$$

Es soll nun untersucht werden, was geschieht, wenn die Länge des starren Randstücks Σ gegen Null strebt. Um dazu ein passsendes Randstück zu konstruieren, wird die folgende Definition und das sich daran anschließende Lemma benötigt.

(4.3) Definition. Sei $\varphi \in \operatorname{Kern}(T)$.

i) Eine Nullstelle von $\partial_\nu \varphi$ heißt ein Knoten von φ.
Eine k-fache Nullstelle von $\partial_\nu \varphi$ heißt dementsprechend k-facher Knoten von φ.

ii) Sei φ_i die i-te normierte Eigenfunktion des Operators L aus Definition (3.14), $1 \leq i \leq q$. Dann definiert man zu φ_i die Funktion $v_i : I \to \mathbb{R}$ über

$$v_i(s) := -\partial_\nu \varphi_i(\gamma(s)) = -\partial_\nu \varphi_i(x)$$

(4.4) Lemma. *Sei $B \subset \partial\Omega$, so dass die Funktionen v_1 und v_2 aus Definition (4.3) linear unabhängig sind. Außerdem gelte $\cos\alpha(s) \neq 0$ und $\sin\alpha(s) \neq 0$ für alle $s \in I_B = \{s \in I\,;\gamma(s) \in B\}$. Dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} v_1(s) & v_2(s) \\ \dot{v}_1(s) & \dot{v}_2(s) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in I_B$$

Beweis. Benutzt man in der auf $\partial\Omega$ geltenen partielle Differentialgleichung

$$\Delta\varphi_i - \partial_\nu \varphi_i \, \partial_\nu \Delta\varphi_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2$$

die Darstellung des Laplace-Operators in Fermi-Koordinaten nach (4), so erhält man eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten. Dann folgt die Behauptung z. B. mit [3], S. 130. □

(4.5) Konstruktion von Σ_h.
1. Schritt: Wähle $B \subset \partial\Omega$ mit $\kappa \neq 0$ in B
2. Schritt: Wähle einen Teilbogen $\widehat{B} \subset B$, so dass $v_i \neq 0$ für alle i und alle $s \in I_{\widehat{B}} = \{s \in I\,;\gamma(s) \in \widehat{B}\}$ gilt.
3. Schritt: Wähle $s_0 \in I_{\widehat{B}}$, so dass $\det \begin{pmatrix} v_1(s_0) & v_2(s_0) \\ \dot{v}_1(s_0) & \dot{v}_2(s_0) \end{pmatrix} \neq 0$ gilt
4.Schritt: Sei $h < \frac{1}{2} \operatorname{dist}\left(I_{\widehat{B}}, s_0\right)$. Dann definiert man das Randstück Σ_h als

$$\Sigma_h := \{\gamma(s)\,; s \in I_h := [s_0 - h,\ s_0 + h]\}$$

Der Mittelpunkt von Σ_h ist $x_0 := \gamma(s_0)$.

Es werden ab nun die folgenden abkürzenden Schreibweisen benutzt:

$$\hat{\rho}(h) := \hat{\rho}_{\Sigma_h}, \quad \hat{\varphi}_h := \hat{\varphi}_{\Sigma_h} \quad \text{und } \mathcal{Z}_h := \mathcal{Z}_{\Sigma_h}.$$

Damit wird (24) zu

$$(25) \qquad \begin{cases} \Delta^2\hat{\varphi}_h + \lambda\,\Delta\hat{\varphi}_h = 0 & \text{in } \Omega \\ \hat{\varphi}_h = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ \Delta\hat{\varphi}_h - \partial_\nu\hat{\varphi}_h\,\partial_\nu\Delta u - \hat{\rho}(h)\,\partial_\nu\hat{\varphi}_h = \hat{\beta}_h & \text{in } \partial\Omega\backslash\Sigma_h \\ \partial_\nu\hat{\varphi}_h = 0 & \text{in } \Sigma_h \end{cases}$$

4.2 Der Grenzübergang $h \to 0$ für $\hat{\rho}(h)$

Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$\min_{\mathcal{Z}_h} \frac{E(v)}{d(v)} = \frac{E(\hat{\varphi}_h)}{d(\hat{\varphi}_h)} = \hat{\rho}(h).$$

Es wird nun gezeigt, dass das Minimum $\hat{\rho}(h)$ gegen Null konvergiert, wenn die Länge des starren Randstücks Σ_h gegen Null strebt. Die Beschränktheit der Folge $\{\hat{\rho}_h\}_h > 0$ nach unten ist offensichtlich. Denn da $\mathcal{Z}_h$ eine Teilmenge von $\mathcal{Z}$ ist, stellt $\hat{\rho}(h)$ das Minimum des Quotienten $\frac{E}{d}$ in einer kleineren Klasse von Funktionen als der Klasse $\mathcal{Z}$ dar. Es gilt also für alle $h > 0$

$$0 = \rho \leq \hat{\rho}(h). \tag{26}$$

Das nächste Lemma zeigt, dass die Folge $\{\hat{\rho}(h)\}_h$ konvergent ist.

(4.6) Lemma. *Der Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ von Problem (25) konvergiert für $h \to 0$ gegen ein $P \geq 0$.*

Beweis. Die Folge $\{\hat{\rho}(h)\}_{h>0}$ ist monoton fallend, da $\hat{Z}_{h_2} \subset \hat{Z}_{h_1}$ für $0 < h_1 < h_2$. Nach (26) ist sie außerdem nach unten durch Null beschränkt. Damit existiert ein $P \geq 0$, so dass $\lim_{h \to 0} \hat{\rho}(h) = P$ gilt. □

Um zu zeigen, dass der Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ für $h \to 0$ gegen Null konvergiert, wird eine spezielle starre Gebietsvariation konstruiert. Dazu wird zunächst eine Gebietsvariation nach Bemerkung (2.2) benötigt. Sei $\Phi \in \operatorname{Kern}(T)$ von der Form

$$\Phi = \sum_{i=1}^{q} c_i \, \varphi_i \text{ mit } c_i \neq 0 \text{ für mindestens drei verschiedene } i.$$

φ_i ist dabei die i-te normierte Eigenfunktion des Operators L aus Definition (3.14). Es sei außerdem angenommen, das Φ einen zweifachen Knoten in x_0 hat und $d(\Phi) = 1$ gilt. Dann gibt es eine Folge $\{\Phi_h^*\}_h \in \operatorname{Kern}(T)$ mit $\partial_\nu \Phi_h^*(\gamma(s_0 \pm h)) = 0$, die für $h \to 0$ gleichmäßig gegen Φ konvergiert. Um eine Gebietsvariation nach Bemerkung (2.2) zu erhalten, definiert man $V_h^*(s) := -\partial_\nu \Phi_h^*(\gamma(s))$ in $I_h := [s_0 - h, s_0 + h]$ und setzt V_h^* auf ganz I so fort, dass $\lim_{h \to 0} V_h^* = 0$ gleichmäßig in I und $\int_I V_h^* ds = 0$ gilt. Mit $\eta_h^* \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, so dass η_h^* auch in h stetig ist und $V_h^* = \eta_h^*.\nu$ in $\partial\Omega$ erfüllt, führt man eine Gebietsvariation nach Definition (2.1) durch. Man erhält so das Gebiet

$$\Omega(\varepsilon, h) := \{x + \varepsilon \, \eta_h^*(x) + o(\varepsilon); x \in \Omega\}.$$

Betrachtet man auf diesem Gebiet das Problem (10), dann hängt der erste Eigenwert nicht mehr nur von ε, sondern auch von h ab. Dies wird durch die Bezeichnung $\lambda(\varepsilon, h)$ verdeutlicht. Man erkennt außerdem mit Hilfe von Bemerkung (2.16), dass $\ddot{\lambda}(0, h)$ in h stetig ist. Mit Hilfe dieser Aussage wird das folgende Lemma bewiesen.

(4.7) Lemma. *Der erste Eigenwert* $\lambda(\varepsilon, h)$ *von*

$$\begin{cases} \Delta^2 u(y;\varepsilon) \ - \lambda(\varepsilon,h)\ u(y;\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega(\varepsilon,h) \\ u(y;\varepsilon) = 0,\ \partial_\nu u(y;\varepsilon) = 0 & \text{in } \partial\Omega(\varepsilon,h) \end{cases}$$

erfüllt $\lim_{h\to 0} \ddot{\lambda}(0,h) = 0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus einer Taylorentwicklungen von $\lambda(\varepsilon, h)$ und der Konstruktion der Gebietsvariation. Entwickelt man $\lambda(\varepsilon, h)$ um $\varepsilon = 0$, dann erhält man

$$\lambda(\varepsilon,h) = \lambda(0,h) + \varepsilon\,\dot{\lambda}(0,h) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ddot{\lambda}(0,h) + o(\varepsilon^2).$$

Für $\varepsilon = 0$ findet keine Variation des Gebiets Ω statt, denn es ist $\Omega(0,h) = \Omega$. Daher ist $\lambda(0,h) = \lambda(\Omega)$. Aus dem gleichen Grund ist $\dot{\lambda}(0,h) = 0$. Damit ist

$$\lambda(\varepsilon,h) = \lambda(\Omega) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ddot{\lambda}(0,h) + o(\varepsilon^2).$$

Da nach Konstruktion $\lim_{h\to 0} V_h^* = 0$ gilt, findet im Grenzwert $h \to 0$ keine Variation des Randes statt, d. h. $\lim_{h\to 0} \lambda(\varepsilon,h) = \lambda(\Omega)$ für alle ε. Also ist

$$\lambda(\Omega) = \lim_{h\to 0} \lambda(\varepsilon,h) = \lim_{h\to 0} \left(\lambda(\Omega) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ddot{\lambda}(0,h) + o(\varepsilon^2) \right).$$

Damit gilt $\lim\limits_{h\to 0} \ddot{\lambda}(0,h) = 0$. □

Mit Lemma (4.7) zeigt man, dass die erste Variation $\omega_h := u_\varepsilon(x + \varepsilon\,\eta_h^*(x) + o(\varepsilon);\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$ der Grundschwingung u in $H^{2,2}(\Omega)$ gegen Null konvergiert.

(4.8) Satz. *Ist* ω_h *die aus der Variation* $x \mapsto x + \varepsilon\,\eta_h^* + o(\varepsilon)$ *hervorgegangene erste Variation von* u*, so gilt*

i) $\lim\limits_{h\to 0} E(\omega_h) = 0$

ii) $\omega_h \xrightarrow{h\to 0} 0$ *in* $H^{2,2}(\Omega)$

Beweis.

i) Nach Bemerkung (2.16) ist $E(\omega_h) = \frac{1}{2}\ddot{\lambda}(0,h)$. Dann folgt aus Lemma (4.7), dass $E(\omega_h)$ für $h \to 0$ gegen Null konvergiert.

ii) Nach Satz (2.12) gilt $\partial_\nu \omega_h = -V_h^*$ in $\partial\Omega$. Da nach Konstruktion V_h^* für $h \to 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} d(\omega_h) = 0$. Wie im Beweis zu Satz (3.9) zeigt man, dass $D(\omega_h) \le C_1$ für ein $C_1 > 0$ gilt.Die Annahme $\omega_h \to \bar{\omega}$ in $H^{2,2}(\Omega)$ mit $\bar{\omega} \not\equiv 0$ liefert dann einen Widerspruch zu $d(\omega_h) \to 0$.

$\square$

Über die Funktionen Φ_h^* und ω_h wird nun eine in Σ_h starre Gebietsvariation definiert. Dazu setzt man $\hat{V}_h := \partial_\nu \omega_h - \partial_\nu \Phi_h^*$ und führt mit $\hat{\eta}_h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, so dass $\hat{V}_h = \hat{\eta}_h.\nu$ in $\partial\Omega$ gilt, eine Gebietsvariation nach Definition (2.1) durch. Diese Gebietsvariation ist auf Σ_h starr. Das folgende Korollar zeigt Eigenschaften von $\hat{\omega}_h := u_\varepsilon(x + \hat{\eta}_h(x) + o(\varepsilon); \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$, mit deren Hilfe man $\lim_{h\to 0} \hat{\rho}(h) = 0$ zeigt.

(4.9) Korollar. *Die erste Variation $\hat{\omega}_h$ der Grundschwingung u erfüllt* $\lim_{h\to 0} d(\hat{\omega}_h) = 1$ *und* $\lim_{h\to 0} E(\hat{\omega}_h) = 0$.

Beweis. Nach Konstruktion der Gebietsvariation gilt in $\partial\Omega$ $\;\partial_\nu \hat{\omega}_h = -\hat{V}_h = \partial_\nu \Phi_h^* - \partial_\nu \omega_h$. Damit ist $\hat{\omega}_h = \Phi_h^* - \omega_h$. Das Funktional $d(\hat{\omega}_h)$ hat dann die Gestalt

$$d(\hat{\omega}_h) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \Phi^*)^2 \, dS - 2 \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi_h^* \, \partial_\nu \omega_h \, dS + \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu \omega_h)^2 \, dS.$$

Damit gilt $d(\hat{\omega}_h) \xrightarrow{h\to 0} 1$. Ferner gilt
$E(\hat{\omega}) = E(\Phi_h^* - \omega_h) = E(\Phi_h^*) - E'(\Phi_h^*)\omega_h + E(\omega_h)$. Da $\Phi_h^* \in \mathrm{Kern}(T)$ und somit eine Eigenfunktion des Operators L zum Eigenwert Null ist, gilt $E(\Phi_h^*) = 0$. Nach Lemma (3.22) verschwindet auch $E'(\Phi_h^*)\omega_h$, da $\hat{\omega}_h \in \mathcal{Z}^*$ ist. Somit ist also $E(\hat{\omega}_h) = E(\omega_h)$. Satz (4.8)i) liefert dann die Behauptung. $\square$

Der nächste Satz zeigt, dass $\hat{\rho}(h)$ gegen Null konvergiert.

(4.10) Satz. *Der erste Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ des Eigenwertproblems (25) konvergiert für $h \to 0$ gegen Null.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, es gilt $\lim_{h\to 0} \hat{\rho}(h) = P > 0$. Dann folgt aus

$$\hat{\rho}(h) = \min_{v \in \mathcal{Z}_h} \frac{E(v)}{d(v)}$$

die Ungleichung

$$\frac{E(\hat{\omega}_h)}{d(\hat{\omega}_h)} \geq \hat{\rho}(h) \quad \Leftrightarrow \quad E(\hat{\omega}_h) \geq d(\hat{\omega}_h)\ \hat{\rho}(h)$$

Nach Lemma (4.6) ist $\hat{\rho}(h) \geq P$. Damit gilt

$$E(\hat{\omega}_h) \geq \hat{\rho}(h)\ d(\hat{\omega}_h) \geq P\, d(\hat{\omega}_h) > 0.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung konvergiert nach Korollar (4.9)ii) für $h \to 0$ gegen Null. Daher muss auch $d(\hat{\omega}_h)$ für $h \to 0$ gegen Null konvergieren. Dies steht aber im Widerspruch zu $\lim_{h\to 0} d(\hat{\omega}_h) = 1$ nach Korollar (4.9)i). Es muss damit $\lim_{h\to 0} \hat{\rho}(h) = 0$ gelten. $\square$

4.3 Der Grenzübergang $h \to 0$ für $\hat{\varphi}_h$

Nun wird der Grenzübergang $h \to 0$ für $\hat{\varphi}_h$ betrachtet. Die Grenzfunktion Φ dieser Folge ist dabei ein Linearkombination aus mindestens drei verschiedenen Eigenfunktionen des Operators L zum Eigenwert Null. Hier geht also die Annahme $q \geq 3$ ein.
Mittels der Eigenfunktion $\hat{\varphi}_h$ und der Grenzfunktion Φ wird eine Abschätzung für $\hat{\rho}(h)$ hergeleitet, mit deren Hilfe $\hat{\rho}(h) = 0$ für alle $h > 0$ gezeigt wird. Darin wird der gewünschte Widerspruch bestehen, da der letzte Satz dieses Abschnitts zeigen wird, dass $\hat{\rho}(h) > 0$ für alle $h > 0$ sein muss.

(4.11) Satz. *Sei $\hat{\varphi}_h$ die erste normierte Eigenfunktion des Eigenwertproblems (25). Dann gibt es ein $\Phi \in \mathrm{Kern}(T)$ mit*

i) $\lim_{h \to 0} \hat{\varphi}_h = \Phi$ *in* $H^{2,2}(\Omega)$

ii) Φ *hat einen zweifachen Knoten im Punkt* $x_0 = \gamma(s_0)$

iii) Φ *ist eine Linearkombination aus mindestens drei verschiedenen normierten Elementen aus* $\mathrm{Kern}(T)$.

Beweis.

i) Nach Satz (4.10) ist $\hat{\varphi}_h$ eine normierte Minimalfolge zum Funktional E. Satz (3.4) liefert dann die Existenz einer Grenzfunktion $\Phi \in \mathcal{Z}$ mit $\lim_{h \to 0} \hat{\varphi}_h = \Phi$ in $H^{2,2}(\Omega)$. Da $E(\hat{\varphi}_h) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ gilt, ist $\Phi \in \mathrm{Kern}(T)$.

ii) Da Φ Grenzwert der Folge $\{\hat{\varphi}_h\}_h$ ist, konvergiert $\partial_\nu \hat{\varphi}_h$ in $L^2(\partial\Omega)$ gegen $\partial_\nu \Phi$. Aufgrund der Analytizität von $\partial_\nu \hat{\varphi}_h$ und $\partial_\nu \Phi$ gilt daher $\lim_{h \to 0} \partial_\nu \hat{\varphi} = \partial_\nu \Phi$ in ganz Ω. Insbesondere ist also $\partial_\nu \Phi(x_0) = 0$. Da $\partial_\nu \hat{\varphi}_h = 0$ in Σ_h ist, gilt für alle h

$$0 = \partial_s \partial_\nu \hat{\varphi}_h(x_0) = \tau.\nabla(\nu.\nabla\hat{\varphi}_h(x_0)) = \tau.D^2\hat{\varphi}_h(x_0).\nu.$$

Die Funktionen $\hat{\varphi}_h$ und Φ sind Lösungen der Gleichung $\Delta^2\varphi \; + \lambda\,\Delta\varphi = 0$ in Ω. Da der Rand des Gebiets Ω analytisch ist, sind damit $\hat{\varphi}_h$ und Φ mindestens in $H^{3,2}(\Omega)$. Dann konvergiert $D^2\hat{\varphi}_h$ in $L^2(\partial\Omega)$ gegen $D^2(\Phi)$. Die Behauptung folgt dann mit den gleichen Argumenten wie oben.

iii) Angenommen, Φ ist eine Linearkombination aus weniger als drei verschiedenen φ_j. Wegen $d(\Phi) = 1$ und des zweifachen Knotens von Φ in x_0, muss Φ dann eine Linearkombination aus genau zwei verschiedenen φ_j sein. Ohne Einschränkung seien dies φ_1 und φ_2. Es ist also

$$\Phi = a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 = \det\begin{pmatrix} -b & a \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \neq 0$ sind. Dann kann Φ aber aufgrund der speziellen Wahl des Randstückes Σ in der Konstruktion (4.5) nur einen zweifachen Knoten in x_0 haben, falls $a = b = 0$ gilt.

$\square$

Das folgende Lemma liefert eine Bedingung an den Parameter h, um $\hat{\rho}(h)$ abzuschätzen.

(4.12) Lemma. *Es existiert ein $h_0 > 0$, so dass es eine Konstante $c_0 > 0$ gibt mit*

$$0 < c_0 \leq \int_{\partial\Omega\setminus\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h \, dS$$

für alle $h \leq h_0$. Dabei sind $\hat{\varphi}_h$ und Φ die Funktionen aus Satz (4.11).

Beweis. Die Behauptung folgt aufgrund der Konvergenz $\int_{\partial\Omega\setminus\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h \, dS \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$. $\square$

Damit kann der Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ für $h \leq h_0$ abgeschätzt werden.

(4.13) Satz. *Für jedes $h \leq h_0$, h_0 aus Lemma (4.12), gilt für den Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ von Problem (25)*

$$\hat{\rho}(h) \leq const.\, h^3 + o(h^3).$$

Beweis. Sei $0 < h \leq h_0$ fest und $\Phi \in \mathrm{Kern}(T)$ die Grenzfunktion der Folge $\{\hat{\varphi}_h\}_h$. Wendet man Lemma (3.22)ii) auf Φ und $\hat{\varphi}_h$ statt auf φ und ϑ an, so liefert dies

$$\hat{\rho}(h) \int_{\partial\Omega\setminus\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h \, dS = \int_{\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \left(\hat{\beta}_h - \Delta\hat{\varphi}_h\right) dS.$$

Für $h \leq h_0$ gilt gemäß Lemma (4.12) für das linke Integral

$$\frac{1}{\int_{\partial\Omega\setminus\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h \, dS} \leq \frac{1}{c_0}.$$

Für das rechte Integral gilt

$$\left| \int_{\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \left(\hat{\beta}_h - \Delta\hat{\varphi}_h\right) dS \right| \leq \quad const.\, h^3 + o\big(h^3\big) \qquad \text{für } h \to 0.$$

Dabei nutzt man aus, dass Φ nach Satz (4.11) einen zweifachen Knoten in x_0 hat. Man erhält insgesamt für $\hat{\rho}(h)$ die Abschätzung

$$\hat{\rho}(h) \leq const.\, \frac{h^3}{\int_{\partial\Omega\setminus\Sigma_h} \partial_\nu \Phi \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h \, dS} + o(h^3) \leq const.\, h^3 + o\big(h^3\big)\,.$$

$\square$

Ab nun gelte stets $h \leq h_0$. Der Satz (4.13) gibt Aufschluss über die Form der Taylorentwicklung von $\hat{\rho}(h)$.

(4.14) Folgerung. *Die Entwicklung von* $\hat{\rho}(h)$ *um* $h = 0$ *hat die Gestalt*

$$\hat{\rho}(h) = a_m \frac{h^m}{m!} + a_{m+1} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \dots,$$

wobei $a_m > 0$ *der erste von Null verschiedene Koeffizient ist* ($m \geq 3$).

Als letztes Hilfsmittel wird die Entwicklung von $\hat{\beta}_h$ und $\hat{\varphi}_h$ um $h = 0$ benötigt.

(4.15) Satz. *Die Taylorentwicklungen von* $\hat{\beta}_h$ *bzw.* $\hat{\varphi}_h$ *um* $h = 0$ *haben die Form*

i) $\hat{\beta}_h = b_1 h + b_2 \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

ii) $\hat{\varphi}_h = \Phi + \Psi_1 h + \Psi_2 \frac{h^2}{2} + o(h^2)$*, dabei ist* Φ *die Grenzfunktion aus Satz (4.11) und* $\Psi_j \in \mathrm{Kern}(T)$ *für* $1 \leq j \leq m-1$ *(*m *aus Folgerung (4.14)).*

Beweis.

i) Man wendet Folgerung (2.13) auf $\hat{\varphi}_h$ an und erhält die Behauptung durch den Grenzübergang $h \to 0$.

ii) Nach Satz (4.11) ist der erste Summand der Taylor-Entwicklung von $\hat{\varphi}_h$ um $h = 0$ gerade Φ. Sei nun die Entwicklung von $\hat{\varphi}_h$ um $h = 0$ gegeben durch

$$\hat{\varphi}_h = \Phi + h\,\Psi_1 + \frac{h^2}{2}\,\Psi_2 + \dots$$

Aufgrund der Linearität der Eigenschaften (25) von $\hat{\varphi}_h$ erfüllen die Ψ_k für alle k

$$\begin{cases} \Delta^2\Psi_k + \lambda\,\Psi_k = 0 \text{ in } \Omega \\ \Psi_k = 0 \text{ in } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Psi_k \, dS = 0 \text{ und } \int_\Omega \nabla u.\nabla\Psi_k \, dx = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Nach (25) gilt in $\partial\Omega\backslash\Sigma$ insbesondere

$$\Delta\hat{\varphi}_h - \partial_\nu\hat{\varphi}_h\,\partial_\nu\Delta u - \hat{\rho}(h)\;\partial_\nu\hat{\varphi}_h = \hat{\beta}_h. \tag{28}$$

Differenziert man (28) k-mal nach h für $1 \leq k \leq m-1$, so erhält man unter Berücksichtigung der Entwicklung von $\hat{\rho}(h)$ nach Folgerung (4.14) und der Entwicklung von $\hat{\beta}_h$ nach Teil i) dieses Satzes in $\partial\Omega\backslash\Sigma_h$

$$\Delta\Psi_k - \partial_\nu\Psi_k\,\partial_\nu\Delta u + o(h) = b_k + o(h).$$

Für $h \to 0$ ist also in ganz $\partial\Omega$

$$\Delta\Psi_k - \partial_\nu\Psi_k\,\partial_\nu\Delta u = b_k. \tag{29}$$

Da Ψ_k die Eigenschaften (27) besitzt, kann man Ψ_k als die erste Variation der Grundschwingung u (nach Definition (2.7)) unter einer Gebietsvariation mit $V := -\partial_\nu \Psi_k$ auffassen. Dann erfüllt Ψ_k auch Folgerung (2.13) und es gilt

$$\int_{\partial\Omega} [\Delta\Psi_k - \partial_\nu \Psi_k \, \partial_\nu \Delta u] \, x.\nu \, dS = 0.$$

Damit muss die Konstante b_k nach (29) verschwinden, d. h. es gilt $\Delta\Psi_k - \partial_\nu \Psi_k \, \partial_\nu \Delta u = 0$ in $\partial\Omega$ für $1 \leq k \leq m-1$. Nach der Charakterisierung (3.19) ist für $1 \leq k \leq m-1$ Ψ_k eine Eigenfunktion des Operators L zum Eigenwert $\rho = 0$. Differenziert man (28) k-mal nach h mit $k \geq m$, dann erhält man unter Berücksichtigung der Entwicklung von $\hat{\rho}(h)$ nach Folgerung (4.14)

$$\Delta\Psi_k - \partial_\nu \Psi_k \, \partial_\nu \Delta u - a_k \, \partial_\nu \hat{\varphi}_h - \hat{\rho}(h) \; \partial_\nu \Psi_k + o(h) = b_k + o(h).$$

In $\partial\Omega$ gilt dann für $h \to 0$ nach Satz (4.10) und Satz (4.11)

$$\Delta\Psi_k - \partial_\nu \Psi_k \, \partial_\nu \Delta u - a_k \, \partial_\nu \Phi = b_k.$$

In diesem Fall kann aber $\Delta\Psi_k - \partial_\nu \Psi_k \, \partial_\nu \Delta u$ nicht in ganz $\partial\Omega$ verschwinden, da sonst $\partial_\nu \Phi = 0$ in $\partial\Omega$ gelten müßte. Somit kann Ψ_k für $k \geq m$ nicht in Kern(T) liegen.

□

Mit den nächsten beiden Sätzen kann die Annahme $q \geq 3$ widerlegt werden.

(4.16) Satz. *Für alle* $0 < h \leq h_0$ *ist* $\hat{\rho}(h) = 0$.

Beweis. Sei $0 < h \leq h_0$ beliebig. Nach Lemma (4.15)ii) kann man $\hat{\varphi}_h$ schreiben als

$$\hat{\varphi}_h = \sigma + \vartheta_h \, \frac{h^m}{m!} \quad \text{mit } \sigma \in \text{Kern}(T) \text{ und } \; \vartheta_h := \sum_{k \geq m} \frac{m!}{k!} \, h^{k-m} \Psi_k \; \notin \text{Kern}(T)$$

Da $\hat{\varphi}_h$ eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert $\hat{\rho}(h)$ ist, gilt weiter

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(h) &= E(\hat{\varphi}_h) \\ &= E(\sigma + \vartheta_h \, \frac{h^m}{m!}) \\ &= E(\sigma) + E'(\sigma)(\vartheta_h \, \frac{h^m}{m!}) + E(\vartheta_h \, \frac{h^m}{m!}) \end{aligned}$$

Wegen $\sigma \in \mathrm{Kern}(T)$ gilt $E(\sigma) = 0$. Auch $E'(\sigma)(\vartheta_h \frac{h^m}{m!})$ verschwindet nach Lemma (3.22)i), da $\vartheta_h \frac{h^m}{m!} \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ ist. Damit ist

$$\begin{aligned}
& & \hat{\rho}(h) = E(\vartheta_h \frac{h^m}{m!}) \\
&\overset{(4.14)}{\Leftrightarrow} & a_m \frac{h^m}{m!} + a_{m+1} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots = E(\vartheta_h \frac{h^m}{m!}) \\
&\Leftrightarrow & a_m \frac{h^m}{m!} + a_{m+1} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots = E(\vartheta_h) \left(\frac{h^m}{m!}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow & a_m + \ldots = E(\vartheta_h) \frac{h^m}{m!}
\end{aligned}$$

Es muss also $a_m = 0$ sein. Der Koeffizient a_m ist aber nach Folgerung (4.14) der erste von Null verschiedene Koeffizient der Entwicklung von $\hat{\rho}(h)$. Damit muss $\hat{\rho}(h) = 0$ für alle h gelten. □

Der nächste Satz wird zeigen, dass dies der gesuchte Widerspruch zu $q \geq 3$ ist.

(4.17) Satz. *Für den ersten Eigenwert $\hat{\rho}$ von Problem (23) unter starren Gebietsvariationen gilt $\hat{\rho} > 0$.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Sei $\Sigma \subset \partial\Omega$ das starre Randstück. Nach (26) ist bekannt, dass $\hat{\rho} \geq 0$ ist. Angenommen, es gilt $\hat{\rho} = 0$. Dann ist die zugehörige Eigenfunktion $\hat{\varphi}$ in $\mathrm{Kern}(T)$ und als Eigenfunktion nicht konstant Null in Ω. Damit ist nach Satz (3.23) $\partial_\nu \hat{\varphi} \not\equiv 0$ in jedem Teilbogen von $\partial\Omega$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\partial_\nu \hat{\varphi}_h = 0$ in Σ_h nach (24). Es muss also $\hat{\rho} > 0$ gelten. □

Die Eigenwerte $\hat{\rho}(h)$ verletzen also nach Satz (4.16) diesen letzten Satz. Die Annahme $q \geq 3$ ist damit falsch.

Die Vielfachheit des Eigenwerts Null des Eigenwertprobelms für die zweite Gebietsvariation ist damit genau zweifach. Somit ist auch der Kern des Operators T zweidimensional. Wie in Satz (3.26) gesehen, ist das optimale Gebiet dann eine Kreisscheibe.

Literatur

[1] doCarmo, M. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Aufl., Braunschweig [u.a], Vieweg, 1993

[2] Courant, R. und Hilbert, D. *Methoden der mathematischen Physik, Zweiter Band*, Berlin, Julius Springer, 1937

[3] Forster, O. *Analysis 2*, Braunschweig [u.a.], Vieweg, 1981

[4] Hildebrandt, S. *Analysis II*, Berlin [u.a], Springer, 2003

[5] Mohr, E. *Über die Rayleighsche Vermutung: Unter allen Platten von gegebener Fläche und konstanter Dichte und Elastizität hat die kreisförmige den tiefsten Grundton*, Annali di Matem., vol. 104, Nr.1 (1975), S. 85-122

[6] Rayleigh, J. W. *Theory of Sound*, vol. 1, 2. Aufl., New York, Dover,1894

[7] Rellich, F. *Darstellung der Eigenwerte von* $\Delta u + \lambda\, u = 0$ *durch ein Randintegral*, Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 635f.

[8] Strubecker, K. *Differentialgeometrie*, Berlin, de Gruyter, 1955

[9] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen*, Stuttgart, Teubner, 1982