Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
WS 1997/98

---

1. Aufgabe: Man bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

(2,5)
$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; \left|2x - x^2\right| < 3\left|x-2\right| \le 6 \right\},$$

sofern diese Größen existieren.

---

2. Aufgabe: Man beweise durch vollständige Induktion, daß $1 + 2 \cdot 4^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.
(2,5)

---

3. Aufgabe: Gegeben sei die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n(-1)^n - 2}{2n(-1)^{n+1} + 3}$.
(3)

(α) Man „errate“ $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

(β) Man beweise, daß der unter α) erratene Wert auch Grenzwert ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ explizit so angibt, daß

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.

---

4. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

(4,5)
$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{\sqrt{|x|}} .$$

(a) Man beweise, daß f in $x = 0$ stetig ergänzbar durch den Wert Null ist.

(b) Man beweise, daß $g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist und bestimme $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)$, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)$.

---

5. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion f mit $D(f) = (-1, 1)$ und

(3,5)
$$f(x) = \frac{1}{1 + x|x|} .$$

(a) Man beweise mit Hilfe der Definition, daß f in $x = 0$ differenzierbar ist.

(b) Man untersuche, ob f' in $x = 0$ differenzierbar ist.
