Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
WS 1999/2000

---

1. Aufgabe: Es sei $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{3}{2} \,,\quad \frac{1}{3} \leq \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} \right\}$.

(3,5)

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja"** oder mit **„Nein"** (eine Begründung ist nicht erforderlich):

(a) Gilt $\frac{3}{4} \in M$?

(b) Ist M ein abgeschlossenes Intervall ?

(c) Existiert $\text{Max}\,\{x : \; x \in M\}$?

(d) Ist $\frac{19}{24}$ eine obere Schranke von M ?

(e) Ist 0 eine untere Schranke von M ?

(f) Gilt $\text{Min}\,\{x : \; x \in M\} = \text{Inf}\,\{x : \; x \in M\}$?

(g) Gilt $\text{Sup}\, M = \frac{5}{6}$?

<u>Zur Bewertung von Aufgabe 1:</u>

Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,5 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

2. Aufgabe: Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

(3,5)

$$a_1 > 1 \,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,.$$

(a) Man beweise

(1) $a_n - 1 > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$;

(2) $a_{n+1} < a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$.

(b) Man begründe die Existenz von $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und berechne α .

---

3. Aufgabe: Man beweise mit Hilfe des binomischen Satzes

(1,5)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > 1 + \frac{1}{4}\binom{n}{2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \quad .$$

---

b i t t e   w e n d e n !!

4. Aufgabe: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(3)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2^{1/n} - 1\right)$.

---

5. Aufgabe: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche

(2,5)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} x^n$$

konvergiert.

---

6. Aufgabe: Gegeben sei die Ebene

(2)

$$E : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 ,$$

und die Gerade

$$g : \underline{x} = (1,2,3) + t\,(1,-1,2) \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Man berechne den Schnittpunkt von g mit E. Liegen der Nullpunkt und $P_0 = (-1,5,3)$ auf der gleichen Seite von E ?
