Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
WS 2003/2004

---

1. Aufgabe: *(16)* Gegeben sei die Zahlenfolge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$x_n = 1 + (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right) + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(2 - \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Man bestimme $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Hinweis: $[x] =$ größte ganze Zahl $\leq x$.

---

2. Aufgabe: *(14)* Man beweise, daß die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt{|x|}} & \text{für } x < 0 , \\[2ex] \log \dfrac{1 + x + 2x^2}{1 - x} & \text{für } 0 \leq x < 1 , \\[2ex] 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit

$$|x| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \bigl|f(x) - f(0)\bigr| < \varepsilon .$$

Hinweis: $\bigl|e^y - 1\bigr| \leq \dfrac{|y|}{1 - |y|} \qquad (\ |y| < 1\ )$.

---

3. Aufgabe: Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_1 = 2 , \quad a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n} , \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

(3) **(a)** Man beweise: $2 \leq a_n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N})$;

(6) **(b)** Man zeige: $a_{n+1} \geq a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$;

(2) **(c)** Man zeige, daß $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist ;

(3) **(d)** Man berechne $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

---

b i t t e   w e n d e n !!!

4. Aufgabe: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(6) **(a)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{(5n)!}}{4^n} \quad ,$$

(6) **(b)** $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \log n \quad .$$

---

5. Aufgabe: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche

(8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

konvergiert.

---

6. Aufgabe: Man bestimme den Lotfußpunkt von $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzgl. der Geraden

(6)

$$g\colon\ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \qquad \lambda \in \mathbb{R} ,$$

und berechne den Abstand des Punktes P von g.
