

**1. Aufgabe:** Man beweise durch vollständige Induktion:

(15)

$$n^2 - \frac{3}{5} > \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{1 + 4j^2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

---

**2. Aufgabe:** Man beweise, daß die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

(16)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{für } x \leq 1 \\ \log\left(1 + \frac{x^3 - 1}{x}\right) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

in  $x_0 = 1$  stetig ist, indem man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  so bestimmt, daß gilt:

$$|x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

---

**3. Aufgabe:** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(5) (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \log\left(2 - \frac{1}{n}\right),$

(8) (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)(n+2)},$

---

**4. Aufgabe:** Gegeben seien die Geraden

$$g_1: \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2: \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

sowie der Punkt  $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(6) (a) Man zeige, daß  $g_1$  und  $g_2$  sich schneiden und eine Ebene  $E_0$  aufspannen.

(6) (b) Man bestimme die Hessesche Normalform von  $E_0$  und den Abstand des Punktes  $P$  von  $E_0$ .

---

**5. Aufgabe:** Für  $t \in \mathbb{R}$  wird das Gleichungssystem

(14)

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Man bestimme alle  $t \in \mathbb{R}$ , für die

$$\text{Rang } A = \text{Rang } (A, \underline{b}) = 3$$

ausfällt und gebe die entsprechenden Lösungen von  $A\underline{x} = \underline{b}$  an.

---