Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
28.01.2006

Aufgabe 1 [5 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Durch Umordnen der Summanden einer konvergenten Reihe lässt sich unter Umständen der Grenzwert der Reihe ändern.

(b) Der Satz von Bolzano & Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge genau einen Häufungspunkt hat.

(c) $U = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p$ ist Polynom mit $grad(p) = 11\}$ ist ein linearer Unterraum des Vektorraums der Polynome $V = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p$ ist Polynom$\}$ (mit den in der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen).

(d) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{101}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton wachsend.

(e) Es gibt stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, welche nicht gleichmäßig stetig sind.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Man zeige, dass $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ so angibt, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - y| < \delta_0 \implies \left|g(x) - g(y)\right| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]

(a) (4 Punkte)
Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k}$$

(b) (6 Punkte)
Man bestimme den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \cdot x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und diskutiere das Konvergenzverhalten für $x = \pm R$.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Moivre'sche Formel ($i \in \mathbb{C}$ ist die imaginäre Einheit)

$$\left(\cos(x) + i \sin(x)\right)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) .$$

Hinweis: Zur Lösung der **Aufgabe 3(a)** darf nicht auf Aussagen von eventuell ähnlich klingenden Übungen verwiesen werden.

Aufgabe 1

a) w

b) f

c) f

d) w

e) f

Aufgabe 2

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Betrachte für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \quad 1$$

$$= \left| \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\left(\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2}\right)} \right| \quad 2$$

$$\underset{1}{\leq} |x-y| \left(\underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\left(\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2}\right)}}_{(*)} \right.$$

$$+ \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\left(\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}}_{(**)}\Bigg)$$

Aus $\sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$ folgt

$$(*) \leq \frac{|x|}{1+x^2} < 1$$

$$(**) \leq \frac{|y|}{1+y^2} < 1$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(y)| < 2|x-y| \quad 3$$

Wähle nun $\delta_0 := \frac{\varepsilon}{2}$ so folgt für $|x-y| < \delta_0$

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon. \quad 1$$

Aufgabe 3

a) Es gilt

$$\frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k} = \underbrace{\frac{2^k + 3^k}{3^k}}_{< 2} \quad \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^k - 1}$$

$k \geq 1$

$$< 2 \quad \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^k - 1}$$

Für $k \geq 2$ gilt

$$1 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^k - 1} < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^k} = 2\left(\frac{3}{5}\right)^k \quad \text{für } k \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k} < 4\left(\frac{3}{5}\right)^k$$ 2

$\Rightarrow$ Die Reihe $\left(4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k\right)$ ist eine konvergente Majorante (geometrische Reihe).

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{5^k-3^k}$ konvergiert. 2

b) 1. Lösungsweg: Verwende Wurzelkriterium.

Es gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$ 1

Es gilt: $\quad 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad$ für $n \in \mathbb{N}$

Dann folgt mit der strengen Monotonie von Logarithmus und Wurzel:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\log((1+\tfrac{1}{n})^n)} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\,\sqrt[n]{\log e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\log((1+\tfrac{1}{n})^n)} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\,\sqrt[n]{\log(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\log((1+\frac{1}{n})^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ mit Sandwich- 3

Lemma.

$\Rightarrow R = 1$ 1

2. Lösungsweg: Verwende Quotientenkriterium

Aus $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \overset{1}{=} \exp(1) = e$ und der Stetigkeit des Logarithmus folgt:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\log\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{n^2}\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\to 1} \frac{\overbrace{\log\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)}^{\to \log(e)=1}}{\underbrace{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}_{\to \log(e)=1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad 3$$

...

$\Rightarrow \quad R = 1$ 1

Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls, d. h. für $x = \pm 1$:

$$\left| \frac{1}{n^2} \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) x^n \right| = \frac{1}{n^2} \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{n} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{< \frac{1}{n}} < \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante.

1

$\Rightarrow$ Die Potenzreihe konvergiert für

$$x \in [-1, 1].$$

Aufgabe 4.

$$\left(\cos(x) + i \sin(x)\right)^n \overset{1}{=} \left(e^{ix}\right)^n$$

$$\overset{2}{=} e^{i(nx)}$$

$$\overset{1}{=} \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Eulersche Formel.