Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
11.02.2006

Aufgabe 1 [5 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent und hat denselben Grenzwert wie die Folge.

(b) $g(x) = x^3$, $x \in (0,\infty)$, ist gleichmäßig stetig.

(c) Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist für $|x| < R$ absolut konvergent.

(d) Eine orthonormale Menge von Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, ist immer eine Basis von $U := span\left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\right\}$.

(e) Wenn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ linear abhängig sind, dann sind sie es auch über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine Cauchy–Folge (in $\mathbb{R}$) ist, indem Sie nachweisen, dass

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n, m > N_0$$

gilt.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-3}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$$

Aufgabe 4 [6 Punkte]

Gegeben seien die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, und $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene E durch P_1, P_2 und P_3 und geben Sie den Abstand des Punktes $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von E an.

Aufgabe 5 [4 Punkte]

Sei V Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ seien linear unabhängig und für $\vec{a} \in V$ gelte

$$\vec{a} \notin span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\right\}.$$

Man zeige: Dann sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{a}$ linear unabhängig.

Hinweis: Zur Lösung der **Aufgabe 2** darf nicht auf Aussagen von eventuell ähnlich klingenden Übungen verwiesen werden.

Aufgabe 4

(2)

- $(P_2-P_1)\times(P_3-P_1)=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $E=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \left\langle x-P_1, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\}$

$\Rightarrow$ $E=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle=-\sqrt{18}\right\}$ (2)

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{E=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\sqrt{18}\right\}}}$ (1)

- $\underline{\underline{\operatorname{dist}(0,E)=\sqrt{18}}}$ (1)

Aufgabe 5

Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in K$ gilt:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta a = 0$ (1)

$\Downarrow$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = -\beta a$ (1)

$\Downarrow$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \wedge \beta = 0$; da $a \notin \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ (1)

$\Downarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \wedge \beta = 0$; da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig (1)

Es folgt, daß $v_1, \dots, v_n, a$ linear unabhängig sind $\square$

Aufgabe 1

a) W b) F c) W d) W e) F

Aufgabe 2

(2)

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{16}{\varepsilon}} \right\rceil$. Für $n, m \geq 2$ mit $n, m \geq N_0$ gilt

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n^2 - n} - \frac{1}{m^2 - m} \right|$$

(1) $$= \left| \frac{m^2 - m - (n^2 - n)}{(n^2 - n)(m^2 - m)} \right|$$

(2) $$\leq \frac{|m^2 - m - (n^2 - n)|}{(n^2 - \frac{1}{2}n^2)(m^2 - \frac{1}{2}m^2)}$$; da $\frac{1}{2}n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 2$

(2) $$\leq \frac{m^2 + m + n^2 + n}{\frac{1}{2}n^2 \cdot \frac{1}{2}m^2}$$

(1) $$\leq \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{m^2} + \frac{4}{m^2}$$

$$< \varepsilon$$ $\square$

Aufgabe 3

- Da $\left(\frac{k-3}{k}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\left(1-\frac{3}{k}\right)^k\right)^{\frac{1}{2}} \to \left(e^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ für $k \to \infty$ divergiert (3) (1)

  die Reihe $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k-3}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$.

- Fehler in der Aufgabenstellung bemerkt $\Rightarrow$ (4)