Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

80 94921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
26.11.2005

Aufgabe 1 [7 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \exists\ y \in \mathbb{R}:\ x^2 = y$

(b) Jeder total angeordnete Körper $(\mathbb{K}\,,\,>)$ enthält die Zahlen

$$1,\quad 1+1,\quad 1+1+1, \ldots \quad \text{usw.},$$

welche alle verschieden sind.

(c) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ Körper) gilt: $x \cdot y = x \cdot z \;\Rightarrow\; y = z$

(d) In $\mathbb{C}$ gilt $2 > 1$ und $2i > i$ $\Big($hierbei ist $i = (0,1) \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit$\Big)$

(e) Für die beliebige Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$$

(f) Die Verneinung von $(\exists_1\ x \in M : \mathcal{A}(x))$ ist $(\forall\ x \in M : \neg\mathcal{A}(x))$

(g) Jede nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ hat auch ein Infimum

Hinweis: Jedes richtige Kreuz gibt einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Bestimmen Sie für

$$z := \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{\sqrt{2}}{(1-i)} \right)^k \in \mathbb{C}$$

Realteil und Imaginärteil von z. Geben Sie auch $|z|$ und $\overline{z}$ an. Hierbei ist $i = (0,1) \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass

$$|x| = \sqrt{x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Geben Sie insbesondere an, was mit $\sqrt{y}$ für $y \geq 0$ gemeint ist.
