Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Winter 2006
(90 Minuten)
Höhere Mathematik I
28.02.2006

Aufgabe 1 [7 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent ist, kann es trotzdem eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ geben, die nicht konvergiert.

(b) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn f in x_0 folgenstetig ist.

(c) Es sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann gilt: Es gibt immer ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

(d) Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty)$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ immer konvergent.

(e) Sei $(V, <\cdot,\cdot>)$ ein Skalarproduktraum und $v_1, ..., v_k \in V$ ein Orthonormalsystem. Dann sind $v_1, ..., v_k$ linear unabhängig.

(f) Es sei $L\colon V \to W$ linear. Dann gilt: $\dim(W) = \dim(im(L)) + \dim(ker(L))$

(g) Sei $V = \mathbb{C}^n$ Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann gilt $dim(V) > n$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [7 Punkte]

Es sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{e^x \cdot |2-x|}$.

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x)$. **(4 Punkte)**

(b) Entscheiden Sie, ob f für $x = 2$ stetig ergänzt werden kann, und begründen Sie dies. **(3 Punkte)**

Aufgabe 3 [9 Punkte]

Man zeige, dass $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x \in (0,\infty)$, gleichmäßig stetig ist, indem man für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ angibt, so dass für alle Zahlen $x, y \in (0,\infty)$ gilt:

$$\Big(|x-y| < \delta_0\Big) \implies \Big(|h(x) - h(y)| < \varepsilon\Big) .$$

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^n$ **(5 Punkte)**

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n \cdot \log(n)}$ **(5 Punkte)**

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Sei $\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $H = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^4 \colon < \vec{w}, \vec{n} > = 1 \}$ Hyperebene

und $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ eine Gerade.

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von G und H. **(4 Punkte)**

(b) Zu $\vec{y} = (10\ \ 10\ \ 10\ \ 10)^T \in \mathbb{R}^4$ berechne man die orthogonale Projektion (Lotfußpunkt) $\vec{z} \in H$ von $\vec{y}$ auf H und bestimme den Abstand von $\vec{y}$ zu H. **(6 Punkte)**

Aufgabe 6 [11 Punkte]

Es sei $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ die folgende Abbildung:

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass L linear ist. **(3 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $im(L)$. **(4 Punkte)**

(c) Sei $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{L}_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$. **(4 Punkte)**

Musterlösung

Aufgabe 1:

a) F b) W c) W d) F e) W f) F g) W

Musterlsg

Aufgabe 2

a) Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_n < 2$ und $x_n \to 2$. Da

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 8}{e^{x_n}(2-x_n)} \overset{1}{=} \frac{(x_n-2)(x_n^2+2x_n+4)}{e^{x_n}\,(2-x_n)} \underset{2}{=} -\frac{x_n^2+2x_n+4}{e^{x_n}} \to -\frac{12}{e^2} \quad 1$$

folgt $\underline{\underline{\lim_{x \nearrow 2} f(x) = -\frac{12}{e^2}}}$.

2

b) • Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_n > 2$ und $x_n \to 2$. Da $f(x_n) \to \frac{12}{e^2}$ folgt $\lim_{x \searrow 2} f(x) = \frac{12}{e^2}$.

• Da $\lim_{x \nearrow 2} f(x) \neq \lim_{x \searrow 2} f(x)$ ist f <u>nicht</u> in 2 stetig ergänzbar. 1

Aufgabe 3

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = 2\varepsilon$. Für $x, y \in (0,\infty)$ mit $|x-y| < \delta$ gilt: (1)

$$|h(x) - h(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{y+1}} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{y+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\,\sqrt{y+1}} \right| \quad (2)$$

$$= |x-y| \, \frac{1}{\sqrt{x+1}\,\sqrt{y+1}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}\right)} \quad (3)$$

$$\underset{(2)}{\leq} |x-y| \cdot \frac{1}{2} \underset{(1)}{<} \delta \frac{1}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Musterlösung

Aufgabe 4

a) $\cdot \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-4}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{4}{n+1}\right)^n$ 2 $= \left(1-\frac{4}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{4}{n+1}\right)^{-1} \to e^{-4} \neq 0$ 2 1

$\Downarrow$ Divergenz

b) $\cdot \left(\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n \log n}\right) \overset{2}{=} \frac{3}{n \log n \left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)} \overset{2}{\leq} \frac{3}{n\sqrt{n}}$

$\Downarrow$ Konvergenz 1

Aufgabe 5:

a) • Gleichung um den Schnittpunkt zu bestimmen:

$$\lambda = \frac{1 - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad (1) \quad \Rightarrow \text{Schnittpunkt} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}}} \quad (1)$$

b) • $Z = Y + (\beta - \langle Y, n \rangle)\, n = \underline{\underline{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}83\\90\\104\\76\end{pmatrix}}}$ (1)

(3)

• $\operatorname{dist}(Y, H) = \operatorname{dist}(Y, Z) = \frac{1}{9}\sqrt{441} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$ (2)

Musterlsg.

Aufgabe 6

a) $\cdot$ $L\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_2-(y_1+y_2)\\x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_2+y_1+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\\x_1+y_1\\x_1+y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\\x_2+y_2\\x_2+y_2\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)+L\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$ 2

$\cdot$ $L\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha x-\alpha y\\\alpha x+\alpha y\\\alpha x+\alpha y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\x+y\\x+y\end{pmatrix} = \alpha L\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ 1

b) $\cdot$ $\operatorname{im}(L) = \operatorname{Span}\left\{L\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), L\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ 2

$\cdot$ Da $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ lin. unabhängig sind, bilden sie eine Basis von $\operatorname{im}(L)$. 2

c) $\cdot$ $L(v_1) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\2\end{pmatrix}$ $\quad L(v_2) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ 2

$\cdot$ $\underline{\underline{\mathcal{L}_L^{B,C} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\\2&0\\2&0\end{pmatrix}}}$ 2