Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

HM 1 Bachelor- und Vordiplomsklausur (90 Min) SS 2008

---

1. Aufgabe *(9 Punkte)*

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Aufgabe *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Aufgabe *(11 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 3x^3 + e^{x^2} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist, indem Sie die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

nachweisen.

4. Aufgabe *(5+5 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \log\left(\frac{k+2}{k-1}\right), \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\,\sqrt[k]{k}}.$$

5. Aufgabe *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a > 0$, den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{(n^2)} x^n.$$

6. Aufgabe *(9 Punkte)*

Sei E_1 die Ebene, die durch $P = (-1, 2, 3)$ und $Q = (-1, -1, 1)$ verläuft und senkrecht (= orthogonal) auf der Ebene

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 4y + z = 3\right\}$$

steht. Bestimmen Sie den Abstand d von E_1 zum Ursprung $O = (0, 0, 0)$.

A1) Zeigen sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ mit Hilfe der vollständigen Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \qquad (*)$$

Induktionsanfang: $n=2$: $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ✓ 2

Induktionsvoraussetzung: Es gelte es für ein $n \geq 2$ 2

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{I.V.}{<} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

1

$$= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n^2+2n+1)} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

Da $\frac{n^2+n+1}{n(n^2+2n+1)} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+n+1) > n(n^2+2n+1)$ 4

$\Leftrightarrow n^3 + \cancel{n^2} + n + \cancel{n^2} + n + 1 > n^3 + 2\cancel{n^2} + 1$

$\Leftrightarrow 2n + 1 > 1$ ✓

Aufgrund des Induktionsprinzips gilt $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2$

$\square$

Aufgabe 2

Es gilt

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad 4$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \overset{1}{=} e^{-1}$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{1}{=} e$ folgt, dass

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{-1} \cdot e^1 = 1 \qquad 1$$

3. Aufgabe

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{13}\cdot\varepsilon)$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ gilt 2

$$|f(x) - f(0)| = |3x^3 + e^{x^2} - 1|$$

1 $$\leq 3|x|^3 + |e^{x^2} - 1|$$

$$\leq 3|x| + \frac{x^2}{1-x^2} \quad ; \text{ da } |x| < \delta \leq 1$$ 3

$$\leq 3|x| + \frac{x^2}{1-\frac{1}{4}} \quad ; \text{ da } |x| < \delta \leq 1/2 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4}$$ 3

$$\leq 3|x| + \frac{4}{3}|x| \quad ; \text{ da } |x| < \delta \leq 1$$

$$= \frac{13}{3}|x| < \frac{13}{3}\delta \leq \varepsilon$$ 2

$\square$

Aufgabe 4

a) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \log\left(\frac{k+2}{k-1}\right)$

Wende das Leibnizkriterium an: $a_k = \log(b_k)$ mit $b_k = \frac{k+2}{k-1}$

- Da $b_k > 1$ für $k \geq 2$ gilt, folgt $a_k = \log(b_k) > 0$
- Aus $\lim_{k\to\infty} b_k = 1$ folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log(b_k) = 0$
- Untersuche zunächst b_k auf Monotonie:

$$b_k - b_{k+1} = \frac{k+2}{k-1} - \frac{k+3}{k} = \frac{k(k+2)-(k-1)(k+3)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{k^2+2k-(k^2+2k-3)}{k(k+1)} = \frac{3}{k(k+1)} > 0$$

$\Rightarrow b_k > b_{k+1} \Rightarrow b_k$ monoton fallend

Da der Logarithmus mon. steigend ist, gilt

$a_k = \log(b_k) > \log(b_{k+1}) = a_{k+1} \Rightarrow a_k$ mon. fallend

Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\sqrt[k]{k}}$

Da $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, gilt $\sqrt[k]{k} < 2$ für k hinr. groß.

Für diese k gilt dann $\frac{2}{k\sqrt[k]{k}} > \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, damit folgt mit dem Vergleichskriterium, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\sqrt[k]{k}}$ divergiert.

Aufgabe 5

Für $a_n := a^{(n^2)}$ gilt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\overset{2}{=} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} a^n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > 1 \quad 2 \\ 1 & \text{falls } a = 1 \quad 2 \\ \infty & \text{falls } a < 1 \quad 2 \end{cases}$$

Aufgabe [redacted] 6

Zur Abstandsbestimmung ermitteln wir die Hesse-Normalform von E_1. Offenbar ist

$$a := P - Q = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor von E_1. Da

$$b := \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$

senkrecht auf der Ebene E_2 steht, die wiederum senkrecht zu E_1 ist, ist auch b Richtungsvektor von E_1. Folglich ist $E = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R} \right\}$ 3

$$a \wedge b = \begin{pmatrix}3-8\\10-0\\0-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix}$$

senkrecht zu E_1, also

$$n := \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Normalenvektor. 3

Der gesuchte Abstand berechnet sich nun als Länge der Projektion von $\overrightarrow{OP}$ (oder $\overrightarrow{OQ}$) auf die durch n aufgespannte Gerade, also

$$d = \left|\langle \overrightarrow{OP}, n \rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{14}}\left|\left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\rangle\right| = \frac{4}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{\frac{2}{7}\sqrt{14}}}. \quad 3$$