RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen

Priv.-Doz. Dr. Fotios Giannakopoulos
Lehrstuhl I für Mathematik, RWTH Aachen

HM 1 Bachelor- und Vordiplomsklausur (90 Min) WS 2007/2008

1. Aufgabe (9 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n.$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}}.$$

3. Aufgabe (11 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} \log(1-x^2) & \text{für } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für } \ -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

stetig im Punkt $x_0 := 0$ ist, indem Sie die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (-1,1) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

nachweisen.

4. Aufgabe (5+5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n+2)!} \qquad\qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2}(-1)^n}{n(1+\mathrm{e}^{-n})}$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} x^n$$

6. Aufgabe (8 Punkte)

Es sei

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \,,\ s,t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad X := \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes X von der Ebene E.

Aufgabe 1

(*) $$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$

Induktionsanfang: $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1-1} (2k+1)^2 = (2\cdot 0+1)^2 = 1 = \frac{4}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 1$$ 1

Induktionsvoraussetzung: (*) gelte für ein $n \geq 1$. 1

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} (2k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 \overset{1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 + (2n+1)^2$$

$$\underset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\overset{2}{=}} \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + (2n+1)^2$$

$$= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 4n^2 + 4n + 1$$

$$= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{4}{3}(3n^2 + 3n + 1) - \frac{4}{3} + 1$$ 4

$$= \frac{4}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1)$$

Somit gilt nach dem Induktionsprinzip die Aussage (*) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

$$a_n := \frac{(n+1)! \; n^n}{n! \; (n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1) \; n^n}{(n+1)^{n+1}} \qquad 1$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} \qquad 1$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \qquad 1$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-1} \qquad 2$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \qquad 2$$

Aufgabe 3

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $\delta = \min\left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}\varepsilon} \right\}$ (2) (1)

und $|x| < \delta$:

Falls $0 < x < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| = |\log(1 - x^2)|$$

$$\overset{(2)}{=} -\log(1-x^2) \overset{(1)}{=} \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \log\left(1 + \frac{x^2}{1-x^2}\right) \overset{(2)}{\leq} \frac{x^2}{1-x^2} < \delta^2 \frac{1}{1-x^2}$$

Für $\delta < \frac{1}{2}$ gilt $1 - x^2 > \frac{3}{4}$ (1)

$$\Rightarrow |f(x) - f(0)| < \delta^2 \frac{1}{1-x^2} < \frac{4}{3}\delta^2 \leq \varepsilon$$

Falls $-1 < x \leq 0$:

$$|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$$ (1)

Aufgabe 4

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{6^n}{(n+2)!}$

Benutze das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{6^{n+1}}{6^n} \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{6}{n+3} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent

(sogar absolut konvergent)

Alternative: Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{6}{\sqrt[n]{(n+2)!}}$$

Aus der Übung wissen wir, dass $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

und damit $(n+2)! \geq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} \geq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n/2}$

Damit ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{6}{\left(\frac{n+2}{2}\right)^{1/2}} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

Nächste Alternative: Vergleichskriterium

Aus der Übung bekannt: $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow (n+2)! \geq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}$

$\geq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n/2}$

$$\Rightarrow |a_n| = \frac{6^n}{(n+2)!} \leq \frac{6^n}{\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n/2}} = \left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

für n hinreichend groß $(n \geq 286)$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit dem Vergleichskriterium auch die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2}(-1)^n}{n(1+e^{-n})}$

Es ist $1 + \frac{1}{2}(-1)^n \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und $e^{-n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$b_n = \frac{1 + \frac{1}{2}(-1)^n}{n(1+e^{-n})} \geq \frac{\frac{1}{2}}{2n} = \frac{1}{4n}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist (harmonische Reihe), folgt

mit dem Vergleichskriterium auch die Divergenz

von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

5. Aufgabe

- Da

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 3 \text{ für } n \to \infty$$

① ②

folgt $R = \frac{1}{3}$. ① Also konvergiert die Reihe für $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und divergiert für $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$ ②

- Für $x = \frac{1}{3}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} \cdot (\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Nach dem Vergleichskriterium folgt, daß dies eine konvergente Reihe ist. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = \frac{1}{3}$ ②

- Für $x = -\frac{1}{3}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} \cdot (-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Nach dem Vergleichskriterium ist dies eine konvergente Reihe. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = -\frac{1}{3}$ ①

6. Aufgabe

- Normale auf E: $n = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 3

- Punkt auf E: $\bar{x}_0 = 0$

- Abstand $\bar{x}$ von E = $\left| (\bar{x} - \bar{x}_0) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \left| \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$

5