Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen

Priv.-Doz. Dr. Fotios Giannakopoulos
Lehrstuhl I für Mathematik, RWTH Aachen

Klausur Höhere Mathematik I (Bachelor / Vordiplom)
WS 2007/2008, 2. Termin
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe (9 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^5 - n \text{ ist durch 5 teilbar.}$$

2. Aufgabe (9 Punkte)
Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n .$$

3. Aufgabe (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$

gleichmäßig stetig ist, indem Sie die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in \mathcal{D}(f) : \, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

nachweisen.

4. Aufgabe (6 + 6 + 6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 + n^2 - 5}{n^9 - \sqrt[n]{7}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

5. Aufgabe (9 Punkte)
Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ an, die die Punkte $(1,1,1)$ und $(2,2,2)$ enthält und senkrecht auf der Ebene $\{x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0\}$ steht.

Aufgabe 1

Ind. Anf. $n = 1$: $n^5 - n = 0$ ist durch 5 teilbar ✓ 1

Ind. Vor. : Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte:
$n^5 - n$ ist durch 5 teilbar 1

Ind. Schr.: Es ist

$$(n+1)^5 - (n+1) \overset{2}{=} n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n$$

$$= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \quad 1$$

Der erste Summand, $n^5 - n$, ist nach Induktions- 2
voraussetzung durch 5 teilbar, der zweite Summand,
$5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ hat 5 als Vorfaktor und ist 1
deswegen durch 5 teilbar.

Damit ist auch $(n+1)^5 - (n+1)$ durch 5 teilbar. 1

Aufgabe 2

$$a_n = \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2}$, damit gilt aufgrund dieser Konvergenz, dass

$$0 \leq \frac{n+3}{2n-1} \leq \frac{8}{9} \qquad 5$$

für alle $n > K$, wobei $K \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt ist.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n. \quad \text{für } n > K \qquad 1$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ 1, folgt mit dem Sandwichlemma 1, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n = 0. \qquad 1$$

Alternative:

Betrachte die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und wende das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+3}{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1 \qquad 4$$

Damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Das bedeutet, dass $\{a_n\}_n$ eine Nullfolge sein muss. 5

Aufgabe 3

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 1

dann gilt für alle $x, y \in (-1, 1)$ mit $|x-y| < \delta$: 2

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{x + xy^2 - y - x^2 y}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \quad 1$$

$$\leq |x - y + xy(y-x)| \quad , \text{da } 1+x^2 \geq 1 \text{ \& } 1+y^2 \geq 1 \quad 2$$

$$\leq |x-y| + |xy(y-x)| \quad 1$$

$$\leq 2|x-y| \quad 1 \qquad \text{da } |x| \leq 1 \text{ \& } |y| \leq 1$$

$$< 2\delta = \varepsilon \quad 1$$

Aufgabe 4

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad$ mit $a_n = \frac{n^7+n^2-5}{n^9-\sqrt[n]{7}}$

Es gilt $n^7+n^2-5 \leq 2n^7$ für alle $n \in \mathbb{N}$ 1

und $n^9-\sqrt[n]{7} \geq \frac{1}{2} n^9$ für n hinreichend groß 2

$(\sqrt[n]{7} \longrightarrow 1, \; n \to \infty)$

Damit ist insgesamt

1

$$\frac{n^7+n^2-5}{n^9-\sqrt[n]{7}} \leq 4 \cdot \frac{1}{n^2} \text{ für } n \text{ hinreichend groß.}$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert 1, folgt mit dem Vergleichskriterium, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. 1

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad$ mit $b_n = \left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

Es gilt $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ 1 für alle $n \in \mathbb{N}$, von daher ist

$$\left(1-\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \underset{1}{\geq} \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} \quad 2$$

$\Rightarrow \{b_n\}_n$ ist keine Nullfolge 1, damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. 1

c) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad$ mit $c_n = (-1)^n \frac{1}{n^2-n+1}$

Wende das Leibniz-Kriterium an:

Es gilt $\frac{1}{n^2-n+1} = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} > 0$ 1 $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-n+1} = 0$. 1

Außerdem ist

$$(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+2n+1-n-1+1 = n^2+n+1 \geq n^2-n+1$$

3

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1} \leq \frac{1}{n^2-n+1}$, d.h. $\frac{1}{n^2-n+1}$ ist monoton fallend.

Dann folgt mit dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

1

Aufgabe 5

Eine Parameterdarstellung der Ebene ist gegeben durch

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 3$$

Normalenvektor der Ebene

Verbindungsvektor der beiden Punkte

Damit können wir den Normalenvektor $\underline{n}$ berechnen:

$$\underline{n} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3$$

Die Hessesche Normalform lautet: $\underline{x} \cdot \underline{n} = \underline{p} \cdot \underline{n}$

($\underline{p}$: Stützvektor der Ebene, also $\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Damit erhalten wir die Hesseform

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \qquad 3$$