**Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape**

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921

Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 106
D-52062 Aachen
Germany

# Klausur Höhere Mathematik I (Bachelor / Vordiplom) WS 2009/2010
23.02.2010
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

## Aufgabe 1 [6 Punkte]

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$

## Aufgabe 2 [7 Punkte]

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit den Eigenschaften

**(i)** $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$,

**(ii)** $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a$.

## Aufgabe 3 [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} := \sqrt{3a_n + 4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

für alle reellen Startwerte $a_1 \geq 0$ konvergent ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

## Aufgabe 4 [9 Punkte]

**(a)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

**(b)** Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad \text{(5 Punkte)}$$

## Aufgabe 5 [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Funktion $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x(x-1)}$ auf dem Intervall $(0, \frac{1}{2})$ stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass für alle $x \in (0, \frac{1}{2})$ gilt: $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**Bitte wenden!!**

## Aufgabe 6 **[10 Punkte]**

**(a)** Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 54 \\ 74 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

**(b)** Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome $\mathcal{P} := \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist Polynom}\}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass

$$p_1(x) = x - 1,\ p_2(x) = x^3 + 5x \quad \text{und} \quad p_3(x) = x^3 + 2$$

(6 Punkte)

linear unabhängig sind.

## Aufgabe 1

Beweis durch vollständige Induktion

**IA:** Sei $n = 1$. Dann gilt

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n = \frac{1}{3} < 1 = 1! \qquad ①$$

**IV:** Es gelte $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$. ①

**IS:**

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{3} \; \frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) \; \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\overset{(IV)}{<} n! \; (n+1) \; \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= (n+1)! \; \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad ②$$

Es gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ für $n \to \infty$

und $e < 3$.

$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < (n+1)!$ ②

## Aufgabe 2

Sei $\varepsilon > 0$.

Aus (i) folgt: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_0$

Aus (ii) folgt: $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : |a_{2n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_1$

Wähle $N := \max\{n_0, 2n_1\}$. Dann gilt für $n > N$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{falls } n \text{ gerade}$$

und

$$|a_n - a| \leq |a_{n+1} - a| + |a_{n+1} - a_n|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{falls } n \text{ ungerade.}$$

7

# Aufgabe 3

Wir nehmen zunächst $3a_n + 4 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und die Konvergenz der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ an.
Dann gilt für den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n+4} = \sqrt{3a+4}$$

da die Wurzelfunktion stetig ist. Es folgt $a \geq 0$ da der Wertebereich der Wurzelfunktion $\mathbb{R}_0^+$ ist und (1)

$$a = \sqrt{3a+4} \iff a^2 = 3a+4$$

$$\iff (a-4)(a+1) = 0 \iff a = 4 \text{ oder } a = -1 \quad (2)$$

Da $a \geq 0$ kann der Fall $a = -1$ nicht eintreten.
Unter den o.g. Voraussetzungen gilt also: $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

Sei $a_1 \in [0, 4)$

<u>Beh</u>: Es gilt $0 \leq a_n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Bew</u>: <u>IA</u>: $0 \leq a_1 < 4$ nach Annahme.

<u>IV</u>: Es gelte $0 \leq a_n < 4$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

<u>IS</u>: $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} \overset{(IV)}{\geq} \sqrt{4} = 2 > 0$

$a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} \overset{(IV)}{<} \sqrt{16} = 4$

∎

Sei $a_1 \in [4, \infty)$

<u>Beh</u>: Es gilt $4 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Bew</u>: <u>IA</u>: $a_1 \geq 4$ nach Annahme

<u>IV</u>: Es gelte $a_n \geq 4$ für ein $n \in \mathbb{N}$

<u>IS</u>: $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \overset{(IV)}{\geq} \sqrt{16} = 4$ $\blacksquare$

3

<u>Beh</u>: Es gilt $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ falls $a_1 \in [0, 4)$ und

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ falls $a_1 \in [4, \infty)$.

<u>Bew</u>: $$a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 3a_n - 4}{\sqrt{3a_n+4} + a_n} = (a_n - 4) \underbrace{\frac{a_n + 1}{\sqrt{3a_n+4} + a_n}}_{>0}$$

Da $a_n < 4$ falls $a_1 < 4$ und $a_n \geq 4$ falls $a_1 \geq 4$ folgt die Behauptung. $\blacksquare$

3

Wir haben gezeigt: Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt im Fall $a_1 < 4$ und monoton fallend und nach unten beschränkt im Fall $a_1 \geq 4$.

Satz 2.3.19 bzw. Satz 2.3.20 $\Rightarrow$ Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist für alle $a_1 \geq 0$ konvergent. 1

Da $a_1 \geq 0$ gilt insbesondere $3a_n + 4 \geq 0$, d.h. die zunächst gemachten Annahmen sind erfüllt

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4$

## Aufgabe 4

a) Satz 2.8.12 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\Rightarrow \sin(x) \leq 2x$ für $x$ hinreichend klein

$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \leq \frac{2}{n^2}$ für $n$ hinreichend groß (2)

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergiert, folgt die Konvergenz

von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$ mit dem Majorantenkriterium.

(2)

b) Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)\, n!}{n^n \; (n+1)\, n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (4)$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{e}$ (1)

## Aufgabe 5

Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$. Wähle $\delta = $ 2 $\min\left\{ \frac{|x_0|}{2}, \varepsilon \frac{|x_0|^2}{16} \right\}$.

Dann gilt für $x \in (0, \frac{1}{2})$ mit $|x - x_0| < \delta$: 2

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x_0(x_0-1)} \right|$$

$$= \left| \frac{x_0^2 - x^2 - (x_0 - x)}{x \, x_0 \, (x-1)(x_0-1)} \right| = |x - x_0| \left| \frac{x_0 + x - 1}{x \cdot x_0 \, (x-1)(x_0-1)} \right|$$

$$\leq |x - x_0| \frac{|x_0| + |x| + 1}{|x| \, |x_0| \, |x-1| \, |x_0 - 1|} \qquad 4$$

Aus $x \in (0, \frac{1}{2})$ und $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ folgt

$$|x| < \tfrac{1}{2}, \quad |x_0| < \tfrac{1}{2}, \quad |x - 1| > \tfrac{1}{2}, \quad |x_0 - 1| > \tfrac{1}{2} \qquad 1$$

Weiter folgt aus $|x - x_0| < \delta \leq \frac{|x_0|}{2}$:

$$|x| \geq \big| |x - x_0| - |x_0| \big| = |x_0| - |x - x_0| \geq |x_0| - \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0|}{2} \qquad 2$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \frac{16}{|x_0|^2} < \varepsilon \text{ für}$$

1 $\qquad |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon \frac{|x_0|^2}{4}$

Aufgabe 6

a) Offensichtlich gilt

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 54 \\ 74 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Eine Teilmenge mit 4 Elementen eines dreidimensionalen Vektorraums ist stets linear abhängig.

$\mathbb{R}^3$ über dem Körper $\mathbb{R}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{C}^3$ über dem Körper $\mathbb{R}$.

4

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ ist linear abhängig in $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{R}$.

b) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3) x^3 + (\lambda_1 + 5\lambda_2) x + (-\lambda_1 + 2\lambda_3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1

(Identitätssatz für Polynome) $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1 = -5\lambda_2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1 = 2\lambda_3 \end{array} \right. \qquad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda_3 = -5\lambda_2 \qquad 2$$

$\Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind linear unabhängig. 1