Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921

Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 106
D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik I (Bachelor / Vordiplom) WS 2009/2010

31.03.2010 (Wiederholung)

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Zeigen Sie, dass

$$4^n + 15n - 1 \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 2 **[8 Punkte]**

Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := n\left(\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} - \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}}\right)$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz in Abhängigkeit von $\alpha \geq 0$. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3 **[13 Punkte]**

(a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^3 \qquad \text{(6 Punkte)}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^{2n} \qquad \text{(7 Punkte)}$$

konvergiert.

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in (0,1)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass für $x \in (0,1)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Bitte wenden!!

Aufgabe 5

[7 Punkte]

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) > 0$ für alle $x \in [-1,1]$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$f(x) > C$$

für alle $x \in [-1,1]$.

Aufgabe 6

[8 Punkte]

(a) Gegeben sei die Hyperebene

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 2660 \\ 0 \\ 2660 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von M.

(b) Bestimmen Sie den Abstand

$$\operatorname{dist}(W, M) \qquad \text{(4 Punkte)}$$

des Punktes $W := \begin{pmatrix} 1954 \\ 1974 \\ 1990 \end{pmatrix}$ zu der Hyperebene M.

Aufgabe 1

Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Sei $n=1$. Dann ist

$$4^n + 15n - 1 = 18$$

durch 9 teilbar. 1

IV: Es sei $4^n + 15n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar. 1

IS: $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$

$$= 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18 \quad 2$$

Nach IV ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar. Offensichtlich sind auch 45 und 18 durch 9 teilbar.

$\Rightarrow 4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ist durch 9 teilbar. 2

Aufgabe 2

$$a_n = n\left(\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} - \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}}\right)$$

$$= n \, \frac{2+\frac{2}{n^\alpha} - \left(2-\frac{2}{n^\alpha}\right)}{\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} + \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}}} = \frac{4n^{1-\alpha}}{\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} + \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}}}$$ 2

Sei $0 \le \alpha < 1$: Es gilt

$$\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} + \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}} \le 2\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} \le 2\sqrt{4} = 4$$

$\Rightarrow a_n \ge n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, falls $0 \le \alpha < 1$. 2

Sei $\alpha \ge 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{2}{n^\alpha}} + \sqrt{2-\frac{2}{n^\alpha}}\right) = 2\sqrt{2}$$ 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(4n^{1-\alpha}\right) = 0 \quad \text{falls } \alpha > 1$$ 1

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ falls $\alpha = 1$, 1 und

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ falls $\alpha > 1$. 1

Aufgabe 3

a) Da der Logarithmus (streng) monoton wachsend ist, ist die Folge $\left\{ \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^3 \right\}_{n \geq 2}$ monoton fallend. Aus $n \geq 2$ folgt insbesondere $\left(\frac{1}{\log(n)}\right)^3 > 0$. (2)

Cauchy-Verdichtungssatz $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^3$ ist konvergent

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log(2^n)^3}$ ist konvergent. (2)

Wegen $\sqrt[n]{\frac{2^n}{\log(2^n)^3}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^3 \log(2)^3}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2$

ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log(2^n)^3}$ divergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^3$ ist divergent. (2)

b) Für $y = x^2$ betrachten wir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} y^n$. (1)

Da $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{3} \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}$ ist $R = 3$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} y^n$. (1)

Für $y = 3$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3$ divergent. (1)

Für $y = -3$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3$ divergent. (1)

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} y^n$ konvergiert für $|y| < 3$ und divergiert für $|y| \geq 3$. (1)

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^{2n}$ konvergiert für $|x| < \sqrt{3}$ und divergiert für $|x| \geq \sqrt{3}$. (1)

Aufgabe 4

Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in (0,1)$. Dann gilt für $\delta = \min\left\{ \frac{\sqrt{x_0}}{2}(1-\sqrt{x_0}), \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{x_0}(1-\sqrt{x_0})^2 \right\}$ und $x \in (0,1)$ mit $|x - x_0| < \delta$: 2 2

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{1+\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}} \right|$$

$$= \left| \frac{(1-\sqrt{x_0})(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x_0})(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x_0})} \right|$$

$$= \left| \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x_0})} \right| = |x - x_0| \frac{2}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$ 4

$$\leq |x - x_0| \frac{2}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x_0})\sqrt{x_0}}$$ 1

Falls $|x - x_0| < \frac{\sqrt{x_0}}{2}(1-\sqrt{x_0})$ gilt

$$1 - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x_0} + \sqrt{x_0} - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x_0} + \frac{x_0 - x}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x}}$$

$$\geq 1 - \sqrt{x_0} - \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x}} \geq 1 - \sqrt{x_0} - \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

$$\geq \frac{1}{2}(1-\sqrt{x_0})$$ 2

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \frac{4}{(1-\sqrt{x_0})^2\sqrt{x_0}} < \varepsilon \text{ falls}$$

1 $\quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{x_0}(1-\sqrt{x_0})^2$

Aufgabe 5

f ist stetig auf $[-1, 1]$

Satz von Weierstraß (Satz 2.6.8) $\Rightarrow \inf W(f) \in W(f)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [-1, 1]$ mit $\inf W(f) = f(x_0)$

$\Rightarrow \inf W(f) > 0$

Wähle $c := \frac{1}{2} \inf W(f) > 0$

7

Dann gilt $f(x) \geq \inf W(f) > c \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 6

Ein Normalenvektor zu M ist $\tilde{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Setze $\vec{n} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\beta := \left\langle \begin{pmatrix} 2660 \\ 0 \\ 2660 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2660 \cdot \frac{1}{3} (2+1) = 2660$

$\Rightarrow M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 ; \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 2660 \}$ ist die Hessesche Normalform der Ebene M.

4

$\Rightarrow \operatorname{dist}(W, M) = \left| \beta - \left\langle \begin{pmatrix} 1954 \\ 1974 \\ 1990 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle \right|$

$= \left| 2660 - \frac{1}{3} \left(2(1954 - 1974) + 1990 \right) \right|$

$= \left| 2660 - \frac{1}{3} 1950 \right| = |2660 - 650| = 2010$

4