RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc. 13. März 2015
WS 14/15

Klausur: Höhere Mathematik I

Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{1+\frac{1}{3}\,a_n^2} \quad \text{für} \quad n \geq 1,$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.

Lösung

Bestimme zunächst mögliche Grenzwerte. Angenommen man hätte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann hätte man wegen der Stetigkeit der Wurzel auch

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot a_n^2} \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} a_n^2} \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot a^2} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a^2 = 1+\frac{1}{3}\cdot a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad a = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Wegen $-\sqrt{\frac{3}{2}} \neq \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$ kommt nur $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ als möglicher Grenzwert in Frage.

Wir zeigen mit einer Induktion nach n, dass die Folge durch $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach oben und durch 1 nach unten beschränkt ist.

IA: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

IV: Es gelte $1 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

IS: Man hat $a_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot a_n^2} \overset{IV}{\leq} \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
Und $a_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot a_n^2} \overset{IV}{\geq} \sqrt{1+\frac{1}{3}} \geq 1$.

Somit ist die Folge beschränkt. Wir zeigen noch, dass die Folge monoton steigend ist. Betrachte dazu

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot a_n^2} - a_n = \frac{1-\frac{2}{3}a_n^2}{\sqrt{1+\frac{1}{3}a_n^2}+a_n} \geq 0,$$

denn der Zähler ist nicht negativ da die Folge durch $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach oben beschränkt ist. Außerdem ist der Nenner positiv, da die Folge durch 1 nach unten beschränkt ist. Insgesamt hat man also $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge monoton steigend.

Da die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie nach dem Monotonie-Lemma mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktion f, definiert durch $f(x) := \frac{1}{x^3}$, auf $(0,1)$ stetig ist, indem Sie für ein beliebiges, aber festes $x_0 \in (0,1)$ Folgendes zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(x_0;\varepsilon) > 0, \quad \text{so dass} \quad \forall\, x \in (0,1) \quad \text{gilt:} \quad \Big(\big| x - x_0 \big| < \delta \implies \big| f(x) - f(x_0) \big| < \varepsilon \Big).$$

Lösung

Sei $x_0 \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei weiter $x \in (0,1)$ beliebig aber so gewählt, dass $|x - x_0| < \delta$ für das noch zu bestimmende $\delta = \delta(x_0;\varepsilon) > 0$. Es ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x_0^3} \right| = \left| \frac{x_0^3 - x^3}{x^3 x_0^3} \right|.$$

Mit Polynomdivision erhält man die Gleichheit $x_0^3 - x^3 = (x_0 - x)(x_0^2 + x x_0 + x^2)$ und damit

$$|f(x) - f(x_0)| \overset{x_0, x > 0}{=} |x_0 - x| \left(\frac{x_0^2 + x x_0 + x^2}{x^3 x_0^3} \right) = |x_0 - x| \left(\frac{1}{x^3 x_0} + \frac{1}{x^2 x_0^2} + \frac{1}{x x_0^3} \right).$$

Um die Terme $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x}$ zu begrenzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2}$.

Dann gilt $x > x_0 - \delta \geq \frac{x_0}{2}$ und damit auch die Ungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \left(\frac{1}{(\frac{x_0}{2})^3 x_0} + \frac{1}{(\frac{x_0}{2})^2 x_0^2} + \frac{1}{\frac{x_0}{2} x_0^3} \right) = \delta \cdot \frac{14}{x_0^4}.$$

Wählen wir zudem $\delta \leq \frac{x_0^4}{14} \cdot \varepsilon$ erhalten wir

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{x_0^4}{14} \cdot \varepsilon \cdot \frac{14}{x_0^4} = \varepsilon.$$

Mit der Wahl $\delta := \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^4}{14} \cdot \varepsilon\}$ ist damit das ε-δ-Kriterium für jedes $x_0 \in (0,1)$ erfüllt. Damit ist gezeigt, dass die Funktion f stetig auf $(0,1)$ ist.

Alternative Lösung

Sei $x_0 \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^4}{48} \cdot \varepsilon\}$.

Dann gilt für $x, x_0 \in (0,1)$ beliebig mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x_0^3} \right| = \left| \frac{x_0^3 - x^3}{x^3 x_0^3} \right| \\ &\overset{\text{PD}}{=} \frac{|x_0 - x|(x_0^2 + x x_0 + x^2)}{x^3 x_0^3} =: (\star). \end{aligned}$$

Wegen $|x - x_0| < \delta$ und $\delta \leq \frac{x_0}{2}$ folgt

$x > \frac{x_0}{2}$ und $x < \frac{3}{2} x_0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\star) &< \frac{\delta(x_0^2 + \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{9}{4}x_0^2)}{(\frac{x_0}{2})^3 x_0^3} = \frac{38}{x_0^4}\delta \\ &\leq \frac{x_0^4}{48} \cdot \frac{38}{x_0^4} \cdot \varepsilon = \frac{38}{48}\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 3

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 - 2z - 2iz = 0$$

an.

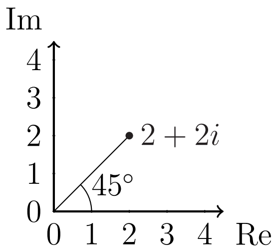
Hinweis: i bezeichnet die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$.

Lösung

$$\begin{aligned} & z^6 - 2z - 2iz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(z^5 - (2+2i)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z = 0 \text{ oder } z^5 = 2 + 2i \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |2+2i| &= \sqrt{8} \\ \arg(2+2i) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



Also ist

$$\begin{aligned} z^5 = 2 + 2i &= \sqrt{8} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad z &= \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} &= \{z \in \mathbb{C} | z = 0 \text{ oder } z = \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{0, \sqrt[10]{8} e^{i\frac{\pi}{20}}, \sqrt[10]{8} e^{i\frac{9\pi}{20}}, \sqrt[10]{8} e^{i\frac{17\pi}{20}}, \sqrt[10]{8} e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt[10]{8} e^{i\frac{33\pi}{20}}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{2k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k + 2^k}{3^k - 2^k} \cdot x^k$

Hinweis: Überprüfen Sie explizit die Randpunkte der Konvergenzintervalle.

Lösung

(a) Wir substituieren zunächst $y = x^2$ und betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot y^k$.

Den Konvergenzradius ermitteln wir nun mit dem Quotientenkriterium.
Wir setzen $a_k = \frac{1}{2^k}$. Dann gilt: $r^{-1} = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}$.
Damit ist der Konvergenzradius der betrachteten Reihe $r = 2$.
Rücksubstitution liefert den Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe: $R = \sqrt{r} = \sqrt{2}$.
Randpunkte betrachten:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sqrt{2}^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergiert nach VL. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergiert nach VL.
Alternative Argumentation:
Die Folgen, über die in der vorigen Zeile summiert wird, sind keine Nullfolgen.
Damit gilt insgesamt: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ gilt.

(b) Wir setzen $b_k = \dfrac{6^k + 2^k}{3^k - 2^k}$. Dann gilt: $R^{-1} = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} \overset{\text{GWS}}{=\!=\!=} 2$.

Der Konvergenzradius der Reihe ist also $R = \dfrac{1}{2}$.
Betrachte nun die Randpunkte:
$\underline{x = 1/2:}$
Wir erhalten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (2/6)^k}{1 - (2/3)^k}$.
Die Folge, über die summiert wird, hat den Grenzwert 1 und ist damit keine Nullfolge.
Die Reihe divergiert.
$\underline{x = -1/2:}$
Wir erhalten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 + (2/6)^k}{1 - (2/3)^k}$.
Die Folge, über die summiert wird, divergiert und ist damit keine Nullfolge.
Die Reihe divergiert.
Dass die o.g. Folge, die wir mit $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wollen, divergiert, sieht man so ein:
Einerseits ist $\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_{2k} = 1$, andererseits gilt $\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_{2k-1} = -1$.
Alternative Argumentation: Betrag der Folge betrachten.
Damit gilt insgesamt: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gilt.

Aufgabe 5

Die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$, der Punkt $X \in \mathbb{R}^3$ und der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad X := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} := \overrightarrow{0X}.$$

(a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes X von der Ebene E sowie die orthogonale Projektion von X auf E.

(b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{v}$, der den kleineren der beiden Winkel zwischen $\vec{x}$ und der positiven x_2-Achse halbiert und die Länge $\sqrt{3}$ hat.

Lösung

(a) Bestimme die Hesse-Normalform von E:

$$\vec{n_0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} := \frac{1}{\|\vec{n_0}\|} \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \vec{y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

Abstand von x zu E: $$\operatorname{dist}(\vec{x}, E) = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 2$$

Orthogonale Projektion: $$\vec{x} - \left\langle \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(b) Normiere den Vektor $\vec{x}$ zu $\vec{z}$:

$$\vec{z} := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{9+9+18}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ansatz: Gesucht ist $\vec{v} = \lambda \cdot (\vec{z} + \vec{e_2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$.
Wegen

$$\vec{z} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\vec{z} + \vec{e_2}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{3},$$

ist dies mit $\lambda = 1$ erfüllt, also:

$$\vec{v} = \vec{z} + \vec{e_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$