RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc.
WS 14/15

01. April 2015
Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik I

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz für $n \to \infty$, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)},\ n \in \mathbb{N}$

(b) $b_n = \dfrac{n!}{(n-1)^n},\ n \geq 2$

(c) $c_n = \left[1-(n-2)^{-1}\right]^{n+5},\ n \geq 3$

(d) $d_n = \left[(-1)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1-n^{-1}\right),\ n \in \mathbb{N}$

Lösung
(a) Es gilt:

$$a_n = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{n \cdot \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n \cdot [(n^2+1)-n^2]}$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n} = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1 \xrightarrow{n\to\infty} 2.$$

Die Folge konvergiert mit Grenzwert 2.

(b) Es gilt $0 \leq b_n = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-1)} = \underbrace{\dfrac{n}{n-1}}_{\leq 2} \cdot \underbrace{\dfrac{n-1}{n-1}}_{=1} \cdot \underbrace{\ldots}_{\text{jeweils } \leq 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{n-1}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to 0} 0.$

Die Folge konvergiert mit Grenzwert 0.

(c) Es gilt $c_n = \left[1-(n-2)^{-1}\right]^{n+5} = \left[1+\dfrac{-1}{n-2}\right]^{n-2} \cdot \left[1+\dfrac{-1}{n-2}\right]^{7} \xrightarrow{n\to\infty} \exp(-1) \cdot 1 = \exp(-1).$
Die Folge konvergiert mit Grenzwert e^{-1}.

(d) Für $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$ ist $d_n \equiv 0$.
Für $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ gilt $d_n = 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \geq \sqrt{2}^n \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}^{n-2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$
Die Folge divergiert.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi k)}{k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(k+2)!-k!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-\sqrt{k^4+k}}{\sqrt{k}}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot[\log(k)]^2}$

Lösung

(a) Es gilt $\cos(\pi k)=(-1)^k,\ k\in\mathbb{N}$. Deshalb ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi k)}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$.

$\displaystyle\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Mit dem Leibniz-Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

(b) Kürze $k!$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(k+2)!-k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+1)-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+3k+1}$.

Wegen $k^2+3k+1>k^2,\ k\in\mathbb{N}$,

ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ein konvergente Majorante für die ursprüngliche Reihe.

Die Reihe konvergiert.

(c) Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-\sqrt{k^4+k}}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(k^2-\sqrt{k^4+k}\right)\cdot\left(k^2+\sqrt{k^4+k}\right)}{\sqrt{k}\cdot\left(k^2+\sqrt{k^4+k}\right)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^{5/2}+\sqrt{k^5+k^2}}$

Mit der Monotonie der Wurzel erhält man die Abschätzung $\sqrt{k^5+k^2}>k^{5/2},\ k\in\mathbb{N}$, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^{5/2}+\sqrt{k^5+k^2}}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^{3/2}}.$$

Die letzte Reihe ist eine konvergente Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^{5/2}+\sqrt{k^5+k^2}}$; damit hat man die Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

(d) $\displaystyle\frac{1}{k\cdot[\log(k)]^2}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Daher kann man den Cauchy'schen Verdichtungssatz anwenden.

Betrachte also

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k}{2^k\cdot[\log(2^k)]^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log(2)^2\cdot k^2}=\frac{1}{\log(2)^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Diese Reihe konvergiert nach Vorlesung. Damit ist die ursprüngliche Reihe ebenfalls konvergent (Cauchy: „Genau dann, wenn...“).

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass f, definiert durch $f(x) := x^4 + 2$, auf $I := [0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist, indem Sie nachweisen, dass folgende Aussage gilt: $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, so dass $\forall\ \delta > 0$ Punkte $x_0 \in [0, \infty)$ und $y_0 \in [0, \infty)$ existieren mit

$$|y_0 - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(y_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Lösung
Wähle $\varepsilon_0 = 1$.
Wähle $x_0 = 2/\delta$.
Wähle $y_0 = x_0 + \delta/2$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(y_0) - f(x_0)| &= |f(x_0 + \delta/2) - f(x_0)| \\
&= \left|x_0^4 + 4 \cdot x_0^3 \cdot \delta/2 + 6 \cdot x_0^2 \cdot (\delta/2)^2 + 4 \cdot x_0 \cdot (\delta/2)^3 + (\delta/2)^4 + 2 - x_0^4 - 2\right| \\
&\overset{x_0, \delta \geq 0}{=\!=} 4 \cdot x_0^3 \cdot \delta/2 + 6 \cdot x_0^2 \cdot (\delta/2)^2 + 4 \cdot x_0 \cdot (\delta/2)^3 + (\delta/2)^4 \\
&\geq 6 \cdot x_0^2 \cdot (\delta/2)^2 \\
&\overset{x_0 = 2/\delta}{=\!=} 6 \\
&> 1 = \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Andererseits ist $|y_0 - x_0| = |x_0 + \delta/2 - x_0| \overset{\delta > 0}{=\!=} \delta/2 < \delta$.

Mit der oben angegebene Wahl von ε_0, x_0 und y_0 erhalten wir also einen Widerspruch zur gleichmäßigen Stetigkeit von f auf I.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$4\cos(x) = x,\ x \in \mathbb{R},$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen hat.

Lösung

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := 4\cos(x) - x.$$

Da der Kosinus und Polynome stetig sind, ist auch die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$. Außerdem hat man

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= 4\cos(-\pi) + \pi = -4 + \pi < 0, \qquad \text{da } \pi < 4, \\ f(0) &= 4\cos(0) + 0 = 4 > 0 \end{aligned}$$

und

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

Daher folgt mit dem Zwischenwertsatz

$$\begin{aligned} &\exists\, x_1 \in (-\pi, 0)\,,\ \text{so dass } f(x_1) = 0 \text{ und} \\ &\exists\, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \text{so dass } f(x_2) = 0. \end{aligned}$$

Also hat die Funktion f mindestens zwei verschiedene Nullstellen. Dies ist äquivalent dazu dass die Gleichung

$$4\cos(x) = x,\ x \in \mathbb{R},$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen hat.

Aufgabe 5
Zeigen Sie die Gleichung

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Sie können zum Beispiel die EULER'sche Formel verwenden.

Lösung
Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) &\overset{\star}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\exp(i(x-y)) - \exp(i(x+y))\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\exp(ix)\exp(-iy) - \exp(ix)\exp(iy)\right) \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(-y) + i\sin(-y)\right) \\
&\qquad - \left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)\big) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(y) - i\sin(y)\right) \\
&\qquad - \left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)\big), \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\cdot\left(-2i\sin(y)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\sin(x)\sin(y) - 2i\cos(x)\sin(y)\right) \\
&= \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

<u>Alternative:</u>

$$\begin{aligned}
\exp(i(x+y)) &\overset{\star}{=} \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\
\exp(i(x-y)) &\overset{\star}{=} \cos(x-y) + i\sin(x-y)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(i(x+y)) - \exp(i(x-y)) &= \exp(ix)(\exp(iy) - \exp(-iy)) \\
&\overset{\star}{=} (\cos(x) + i\sin(x))\cdot((\cos(y) + i\sin(y)) - (\underbrace{\cos(-y)}_{=\cos(y)} + i\underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin(y)})) \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))\cdot 2i\sin(y) = -2\sin(x)\sin(y) + 2i\cos(x)\sin(y) \\
\Rightarrow \qquad \cos(x+y) - \cos(x-y) &= \operatorname{Re}(\exp(i(x+y)) - \exp(i(x-y))) \\
&= -2\sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

$\star =$ Euler-Formel

Aufgabe 6

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ eine Winkel von $\frac{\pi}{2}$ einschließen.

Lösung

Ein Winkel von $\frac{\pi}{2}$ zwischen zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist äquivalent zu $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \underset{[1]}{=} 0 = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \underset{[1]}{=} 0$$

Lösungsweg 1 (rechnerisch):

Vektoren aufstellen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 \end{pmatrix}_{[1]} \quad \text{und} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 1 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}_{[1]}$$

Skalarprodukt berechnen:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{a} + \vec{b} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 1 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -a_3 \cdot (a_1 + b_1) + a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_1 \cdot (a_3 + b_3) \\ &= -a_1 a_3 \underbrace{- a_3 b_1 + a_3 b_1}_{=0} - b_3 a_1 + a_1 a_3 + a_1 b_3 \\ &= -a_1 a_3 + a_1 a_3 + a_1 b_3 - b_3 a_1 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Lösungsweg 2 (argumentativ):

- Falls $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so folgt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$ sofort.
- Falls $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig und beide nicht der Nullvektor.

  $\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine Ebene auf, die insbesondere $\vec{a} + \vec{b}$ enthält.
  Da $\vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal zur Ebene und damit auch zu $\vec{a} + \vec{b}$ steht, gilt $\left\langle \vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{a} + \vec{b} \right\rangle = 0$.

Lösungsweg 3:

Da das Skalarprodukt bilinear ist und ein Vektor stets senkrecht auf ein Vektorprodukt von sich selbst und einem beliebigen anderen Vektor steht, gilt:

$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{a} + \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{a} \right\rangle + \left\langle \vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{b} \right\rangle = 0 + 0 = 0.$$