

Aufgabe 1Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Hinweis: $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

LösungBeweis mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA: $n = 1$: $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = (1+1)^1 = 2 = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$ ✓

IV: Die Annahme $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: „ $n \rightarrow n+1$ “

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right] \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die durch $a_1 := 6$ und $a_{n+1} := 2 + \sqrt{a_n + 4}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Lösung

Angenommen, die Folge wäre konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann würde aufgrund der Grenzwertsätze gelten

$$a = 2 + \sqrt{a + 4} \Rightarrow (a - 2)^2 = a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a = a(a - 5) = 0.$$

Folglich wäre der Grenzwert entweder $a = 0$ oder $a = 5$.

Zeige nun, dass $5 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n = 1$

$5 < a_1 = 6$ nach Definition.

Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $5 \leq a_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n \rightarrow n + 1$ (**Induktionsschritt**):

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n + 4} \stackrel{\text{IV}}{\geq} 2 + \sqrt{5 + 4} = 2 + 3 = 5$$

nach IV.

Die Behauptung $5 \leq a_n$ gilt also für $n \in \mathbb{N}$ per Induktion.

Es wird schließlich noch gezeigt, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2 + \sqrt{a_n + 4}}{a_n} = \frac{2}{a_n} + \frac{\sqrt{a_n + 4}}{a_n} = \frac{2}{a_n} + \sqrt{\frac{1}{a_n} + \frac{4}{a_n^2}} \\ &\leq \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{25}} = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung \leq aufgrund der bereits gefundenen Eigenschaft $5 \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Insgesamt ist also $5 \leq a_n$ und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Damit ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und wie einleitend bereits gezeigt muss dann der Grenzwert $a = 5$ sein ($a = 0 < 5$ nicht möglich).

Alternative für Monotonie:

Zeige nun, dass a_n monoton fallend ist, also $a_{n+1} \leq a_n$ per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n = 1$

$a_1 = 6 = 2 + 4 = 2 + \sqrt{16} < 2 + \sqrt{6 + 4} = a_2$ nach Definition.

Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $a_{n+1} \leq a_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n \rightarrow n + 1$ (**Induktionsschritt**):

$$a_{n+2} = 2 + \sqrt{a_{n+1} + 4} \stackrel{\text{IV}}{\leq} 2 + \sqrt{a_n + 4} = a_{n+1}$$

nach IV.

Die Behauptung $a_{n+1} \leq a_n$ gilt also für $n \in \mathbb{N}$ per Induktion, die Folge ist also monoton fallend.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{3 - 4x}{x^2}, \quad x \in (0, 1) =: D(f),$$

stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in D(f)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart angeben, dass für alle $x \in D(f)$ gilt:

$$\left[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right].$$

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{x_0^4 \varepsilon}{40} \right\}$ und $|x - x_0| < \delta$, $x, x_0 \in (0, 1)$. Dann gilt

$$-\delta < x - x_0 < \delta \quad \implies \quad x > x_0 - \delta \geq x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$$

und

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{3 - 4x}{x^2} - \frac{3 - 4x_0}{x_0^2} \right| \\ &= \frac{|3x_0^2 - 4xx_0^2 - 3x^2 + 4x_0x^2|}{x^2x_0^2} \\ &< \frac{3|x^2 - x_0^2| + 4|x_0x^2 - xx_0^2|}{\frac{x_0^4}{4}} \leq \frac{4}{x_0^4} (3|x - x_0||x + x_0| + 4x_0x|x - x_0|) \\ &< \frac{4}{x_0^4} (6|x - x_0| + 4|x - x_0|) < \frac{40}{x_0^4} \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Definition gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \text{so dass} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{gilt:} \quad (1)$$

$$\left[|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right]. \quad (2)$$

Verneinen Sie diese Aussage, indem Sie eine mathematische Aussage für „ f ist nicht gleichmäßig stetig“ formulieren, die außer den Zeichen in den Zeilen (1) und (2) nur die Zeichen „ \geq “, „ \leq “, „ \wedge “ und „ \vee “ verwenden darf.

Lösung

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Definition nicht gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{so dass} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \quad \text{so dass gilt:} \quad (1)$$

$$\left[|x - y| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \right]. \quad (2)$$

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Geben Sie eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) In einem Skalarproduktraum V über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + \|\vec{y}\|^2 \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

(b) Eine nach unten beschränkte Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, die eine konvergente Teilfolge $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ hat, ist selbst konvergent.

(c) Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Dann ist $f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig.

(d) Es gibt keine surjektive Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(e) Es gibt eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit Imaginärteil gleich -5 , so dass $\operatorname{Re}(z^2) = (-5)^2$.

Lösung

(a) Die Aussage ist **wahr**!

Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitsch. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \|\vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

(b) Die Aussage ist **falsch**!

Def. z. B. $b_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_n \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist also nach unten beschränkt.

Außerdem ist $b_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konstante, also konvergente Teilfolge von $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert jedoch offenbar nicht.

(c) Die Aussage ist **falsch**!

Def. z. B. $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Dann hat $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ nach dem QK Konvergenzradius $R = 1$, jedoch divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} -1$, wodurch f nicht wohldefiniert ist.

(d) Die Aussage ist **falsch**!

Def. $g(\varphi) := e^{i\varphi}$. Dann gilt $|g(\varphi)| = 1 \forall \varphi \in \mathbb{R}$ und $\forall z \in S^1 \exists \varphi \in \mathbb{R}$ (bzw. $\exists! \varphi \in [0, 2\pi)$), so dass $g(\varphi) = z$. Damit ist g surjektiv, d.h. die Aussage ist falsch.

(e) Die Aussage ist **wahr**!

Sei $z := x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $y = -5$. Dann gilt $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2xyi - y^2) = x^2 - y^2 = x^2 - (-5)^2 = x^2 - 25 \stackrel{!}{=} 25 \Leftrightarrow x^2 = 50$. Die Gleichung ist also für $z_{1/2} := \pm\sqrt{50} - 5i$ gelöst.

Aufgabe 6

Gegeben seien die Gerade

$$G := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

die Ebene $E_1 := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \vec{y}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$ sowie der Punkt $X := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_2 , welche G und X enthält.
- (b) Bestimmen Sie den Kosinus des von den Ebenen E_1 und E_2 eingeschlossenen Winkels.
- (c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Ebene E_1 .
- (d) Geben Sie die Schnittgerade von E_1 und E_2 in Parameterform an.
- (e) Wie weit liegen die Schnittpunkte $S_G \in E_1 \cap G$ und $S_H \in E_1 \cap H$, wobei
- $$H := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{auseinander?}$$

Lösung

- (a) Füge der Gerade G den Spannvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hinzu und erhalte E_2 in

Parameterform:

$$E_2 := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

lautet die Hessesche Normalenform von E_2 :

$$E_2 = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \vec{y}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 - 1 + 4) = \frac{5}{\sqrt{6}} \right\}$$

- (b) Der Kosinus der Winkels φ zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren. Dazu muss $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **normiert** werden.

Berechne dann:

$$\cos(\varphi) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1 + 0 + 2) = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

- (c) Setze P in E_1 ein: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 + 0 + 2 = 0$

Der Abstand beträgt also 0. (D.h.: $P \in E_1$)

- (d) Die Schnittgerade verläuft in Richtung des Vektors $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, wobei die Vorfaktoren ignoriert werden können:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da mittels (c) offensichtlich $P \in E_1 \cap E_2$, lautet eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$\left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

- (e) Setze für S_G die Gerade G in E_1 ein und bestimme α :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -(2 + 2\alpha) + 2 - \alpha = -3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

was zum Schnittpunkt $S_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt.

Setze für S_H die Gerade H in E_1 ein und bestimme β :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 1 + \beta = \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

was zum Schnittpunkt $S_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt.

Bestimme noch den Abstand der beiden Punkte, also die Norm der Differenz:

$$\|S_H - S_G\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$