Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
WS 2018/19

Klausur: Höhere Mathematik I (für Physiker)

27.02.2019
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Hinweis: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Lösung
Beweis mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

<u>IA:</u> $n = 1$: $\prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = (1+1)^1 = 2 = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$ ✓

<u>IV:</u> Die Annahme $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

<u>IS:</u> „$n \to n+1$“

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right] \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} \\
&= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2
Gegeben sei die durch $a_1 := 6$ und $a_{n+1} := 2 + \sqrt{a_n + 4}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge.
Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Lösung
Angenommen, die Folge wäre konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann würde aufgrund der Grenzwertsätze gelten

$$a = 2 + \sqrt{a+4} \Rightarrow (a-2)^2 = a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a = a(a-5) = 0.$$

Folglich wäre der Grenzwert entweder $a = 0$ oder $a = 5$.
Zeige nun, dass $5 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang:$n = 1$
$5 < a_1 = 6$ nach Definition.
Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $5 \leq a_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n \to n+1$ (**Induktionsschritt**):

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n + 4} \overset{\text{IV}}{\geq} 2 + \sqrt{5+4} = 2 + 3 = 5$$

nach IV.
Die Behauptung $5 \leq a_n$ gilt also für $n \in \mathbb{N}$ per Induktion.
Es wird schließlich noch gezeigt, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2 + \sqrt{a_n+4}}{a_n} = \frac{2}{a_n} + \frac{\sqrt{a_n+4}}{a_n} = \frac{2}{a_n} + \sqrt{\frac{1}{a_n} + \frac{4}{a_n^2}} \\ &\leq \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{25}} = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung $\leq$ aufgrund der bereits gefundenen Eigenschaft $5 \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Insgesamt ist also $5 \leq a_n$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Damit ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und wie einleitend bereits gezeigt muss dann der Grenzwert $a = 5$ sein ($a = 0 < 5$ nicht möglich).
Alternative für Monotonie:
Zeige nun, dass a_n monoton fallend ist, also $a_{n+1} \leq a_n$ per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang:$n = 1$
$a_1 = 6 = 2 + 4 = 2 + \sqrt{16} < 2 + \sqrt{6+4} = a_2$ nach Definition.
Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $a_{n+1} \leq a_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n \to n+1$ (**Induktionsschritt**):

$$a_{n+2} = 2 + \sqrt{a_{n+1} + 4} \overset{\text{IV}}{\leq} 2 + \sqrt{a_n + 4} = a_{n+1}$$

nach IV.
Die Behauptung $a_{n+1} \leq a_n$ gilt also für $n \in \mathbb{N}$ per Induktion, die Folge ist also monoton fallend.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}\,.$

(a) Zeigen Sie, dass $\big|f(x)\big| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, d.h.

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Weisen Sie nach, dass f gleichmäßig stetig ist, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart angeben, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Big[\, |x-y| < \delta \implies \big|\, f(x) - f(y)\,\big| < \varepsilon \Big].$$

Lösung

(a) Wir wollen zeigen

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1,$$

umgeformt also

$$\begin{aligned} 2x &\leq 1 + x^2, & -(1+x^2) &\leq 2x \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (1-x)^2, & -(1+x)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Dies sind beides wahre Aussagen.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{2}{5}\varepsilon$ sowie $|x-y| < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2y}{1+y^2}\right| \\ &= \frac{|2x + 2xy^2 - 2y - 2yx^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &\leq \frac{2|x-y| + 2|xy||x-y|}{(1+x^2)(1+y^2)} < \delta\left(\frac{2}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{2|xy|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right) \\ &\leq \delta\left(2 + \frac{1}{2}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \cdot \left|\frac{2y}{1+y^2}\right|\right) \overset{\text{(a)}}{\leq} \frac{5}{2}\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Definition in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\,, \quad \text{so dass} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \quad \text{gilt:} \tag{1}$$

$$\Big[\, |x - x_0| \,<\, \delta \implies \big|\, f(x) \,-\, f(x_0) \,\big| \,<\, \varepsilon \Big]. \tag{2}$$

Verneinen Sie diese Aussage, indem Sie eine mathematische Aussage für „f ist in $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht stetig“ formulieren, die außer den Zeichen in den Zeilen (1) und (2) nur die Zeichen „$\geq$“, „$\leq$“, „$\wedge$“ und „$\vee$“ verwenden darf.

Lösung

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Definition in $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht stetig, wenn gilt:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \text{so dass} \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in \mathbb{R} \quad \text{so dass gilt:}$$

$$\Big[\, |x - x_0| \,<\, \delta \quad \wedge \quad \big|\, f(x) \,-\, f(x_0) \,\big| \,\geq\, \varepsilon \Big].$$

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Geben Sie eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) In einem Skalarproduktraum V über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:

$$\left\langle \vec{x} + \vec{y}\,,\, \vec{x} + \vec{y} \right\rangle = \| \vec{x} \|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\Big(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Big) + \| \vec{y} \|^2 \qquad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

(b) Eine nach unten beschränkte Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, die eine konvergente Teilfolge $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ hat, ist selbst konvergent.

(c) Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Dann ist $f\colon [-R\,,\, R] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig.

(d) Es gibt keine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to S^1 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z| = 1 \Big\}$.

(e) Es gibt eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit Imaginärteil gleich -5, so dass $\operatorname{Re}(z^2) = (-5)^2$.

Lösung

(a) Die Aussage ist **wahr**!
Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitsch. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \| \vec{x} \|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \| \vec{y} \|^2 \\ &= \| \vec{x} \|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\Big(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Big) + \| \vec{y} \|^2 \end{aligned}$$

(b) Die Aussage ist **falsch**!
Def. z. B. $b_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_n \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist also nach unten beschränkt.
Außerdem ist $b_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konstante, also konvergente Teilfolge von $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert jedoch offenbar nicht.

(c) Die Aussage ist **falsch**!
Def. z. B. $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Dann hat $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ nach dem QK Konvergenzradius $R = 1$, jedoch divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} -1$, wodurch f nicht wohldefiniert ist.

(d) Die Aussage ist **falsch**!
Def. $g(\varphi) := e^{i\varphi}$. Dann gilt $|g(\varphi)| = 1$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ und $\forall z \in S^1$ $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ (bzw. $\exists! \varphi \in [0, 2\pi)$), so dass $g(\varphi) = z$. Damit ist g surjektiv, d.h. die Aussage ist falsch.

(e) Die Aussage ist **wahr**!
Sei $z := x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $y = -5$. Dann gilt $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2xyi - y^2) = x^2 - y^2 = x^2 - (-5)^2 = x^2 - 25 \overset{!}{=} 25 \Leftrightarrow x^2 = 50$. Die Gleichung ist also für $z_{1/2} := \pm\sqrt{50} - 5i$ gelöst.

Aufgabe 6
Gegeben seien die Gerade

$$G := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

die Ebene $E_1 := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \vec{y}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$ sowie der Punkt $X := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_2, welche G und X enthält.

(b) Bestimmen Sie den Kosinus des von den Ebenen E_1 und E_2 eingeschlossenen Winkels.

(c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Ebene E_1.

(d) Geben Sie die Schnittgerade von E_1 und E_2 in Parameterform an.

(e) Wie weit liegen die Schnittpunkte $S_G \in E_1 \cap G$ und $S_H \in E_1 \cap H$, wobei $H := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}$, auseinander?

Lösung

(a) Füge der Gerade G den Spannvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hinzu und erhalte E_2 in Parameterform:

$$E_2 := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

lautet die Hessesche Normalenform von E_2:

$$E_2 = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \vec{y}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 - 1 + 4) = \frac{5}{\sqrt{6}} \right\}$$

(b) Der Kosinus der Winkels φ zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren. Dazu muss $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\vec{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **normiert** werden .

Berechne dann:

$$\cos(\varphi) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1+0+2) = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

(c) Setze P in E_1 ein: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2+0+2 = 0$

Der Abstand beträgt also 0. (D.h.: $P \in E_1$)

(d) Die Schnittgerade verläuft in Richtung des Vektors $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$, wobei die Vorfaktoren ignoriert werden können:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da mittels **(c)** offensichtlich $P \in E_1 \cap E_2$, lautet eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$\left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(e) Setzte für S_G die Gerade G in E_1 ein und bestimme α:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -(2+2\alpha) + 2 - \alpha = -3\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

was zum Schnittpunkt $S_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt.

Setzte für S_H die Gerade H in E_1 ein und bestimme β:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 1 + \beta = \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 0$$

was zum Schnittpunkt $S_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt.

Bestimme noch den Abstand der beiden Punkte, also die Norm der Differenz:

$$\|S_H - S_G\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$