Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

B. Sc. 20.03.2019
WS 2018/19 Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik I

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n := 2^{3n} - \big(-1\big)^n \quad \text{ist durch 9 teilbar}\,.$$

Lösung
Beweis mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:
<u>IA:</u> $n = 1$: $x_1 = 2^3 - \big(-1\big) = 9$ ist durch 9 teilbar. ✓
<u>IV:</u> Die Annahme, dass x_n durch 9 teilbar ist, gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
<u>IS:</u> „$n \to n+1$“
Es gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2^{3(n+1)} - \big(-1\big)^{n+1} \\ &= 8 \cdot 2^{3n} - 8\big(-1\big)^n + 8\big(-1\big)^n - \big(-1\big)^{n+1} \\ &= 8 \cdot \big(2^{3n} - (-1)^n\big) + (-1)^n \cdot 9. \end{aligned}$$

$8 \cdot \big(2^{3n} - (-1)^n\big)$ ist nach IV durch 9 teilbar und $(-1)^n \cdot 9$ ist offensichtlich durch 9 teilbar.
Folglich ist x_{n+1} durch 9 teilbar (als Summe durch 9 teilbarer Summanden).
Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \sqrt{n^2+4n} - n - 2\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

den Grenzwert Null besitzt, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so angeben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|b_n| < \varepsilon$.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+4n} - n - 2 = \left(\sqrt{n^2+4n} - (n+2)\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+4n} + n + 2}{\sqrt{n^2+4n} + n + 2} = \frac{n^2+4n-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+4n}+n+2} \\ &= \frac{n^2+4n-n^2-4n-4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2} = \frac{-4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2}. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{n^2+4n}+n+2 > 0$ und auch $\sqrt{n^2+4n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist folglich

$$|b_n| = \frac{4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2} < \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}.$$

Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ ist die Bedingung $|b_n| < \epsilon$ also erfüllt, falls

$$\frac{4}{n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\epsilon} < n.$$

Sei also ein $\epsilon > 0$ gegeben. Setze

$$N(\epsilon) := \left\lfloor \frac{4}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\epsilon)$, dass $|b_n| < \epsilon$.

Aufgabe 3
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto x^6 - x^2 - 1,$ eine Funktion.
Zeigen Sie, dass f im Intervall $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ genau eine Nullstelle besitzt.

Lösung
Es gilt

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$$

und

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^6}{2^6} - \frac{3^2}{2^2} - 1 = \frac{9}{4}\left(\frac{3^4}{2^4} - 1\right) - 1 = \underbrace{\frac{9}{4}}_{>1}\Bigg(\underbrace{\frac{81}{16} - 1}_{>1}\Bigg) - 1 > 1 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Beh.: f ist streng monoton wachsend auf $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. Dazu zeige für $x < y$: $f(y) - f(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y^6 - y^2 - 1 - x^6 + x^2 + 1 = y^2(y^4-1) - x^2(x^4-1) \\ &> y^2(y^4-1) - x^2(y^4-1) \\ &= (y^2 - x^2)(y^4-1) = (y-x)(x+y)(y^4-1) \geq 0, \end{aligned}$$

da $y - x > 0$ sowie $x + y > 0$ und $y^4 - 1 \geq 0$, für $x, y > 1$.
Nun ist f als Polynom stetig und mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz von genau einem $c \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ mit $f(c) = 0$.

<u>Alternative zur Monotonie:</u>
Für $1 \leq x < y$ ist zu zeigen: $f(x) \overset{!}{<} f(y)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\qquad x^6 - x^2 < y^6 - y^2 \\ \Leftrightarrow &\qquad x^2(x^4-1) \overset{!}{<} y^2(y^4-1). \end{aligned}$$

Aus $1 \leq x < y$ folgt (A) $x^2 < y^2$
und damit auch $1 \leq x^4 < y^4$, d.h. (B) $0 \leq x^4 - 1 < y^4 - 1$.
Hieraus folgt dann

$$x^2 \underbrace{(x^4-1)}_{\geq 0} \overset{(A)}{\leq} \underbrace{y^2}_{>0}(x^4-1) \overset{(B)}{<} y^2(y^4-1).$$

Aufgabe 4

(a) Sei $\alpha \geq 1$ ein Parameter. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^{\alpha}}$$

in Abhängigkeit von α auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$ divergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Lösung

(a) 1. Fall: $\alpha = 1$: Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und die hintere Reihe divergiert nach VL.
2. Fall: $\alpha > 1$:
$\left|\frac{1}{n+n^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n+n^{\alpha}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\frac{1}{n+n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergiert nach VL.
Mit dem Majorantenkriterium konvergiert die ursprüngliche Reihe.

(b) Definiere $a_n := \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
1. Alternative: Quotientenkriterium
Es gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$
Reihe konvergiert mit dem Quotientenkriterium für $x \in (-1+2, 1+2) = (1,3)$.
Reihe divergiert mit dem Quotientenkriterium für $x \in \mathbb{R} \setminus [1,3]$.
$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ konvergiert mit dem Leibnizkriterium.
$x = 3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ und wegen $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \left|\frac{1}{n+n}\right|$ (da $n \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq 1$) für alle $n \in \mathbb{N}$ divergiert diese Reihe nach dem Minorantenkriterium.

2. Alternative: Wurzelkriterium
$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$
Der GW ist 1 wegen $1 \xleftarrow[n\leftarrow\infty]{} \sqrt[n]{2}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$
Reihe konvergiert mit dem Wurzelkriterium für $x \in (-1+2, 1+2) = (1,3)$.
Reihe divergiert mit dem Wurzelkriterium für $x \in \mathbb{R} \setminus [1,3]$.
$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ konvergiert mit dem Leibnizkriterium.
$x = 3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ und wegen $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \left|\frac{1}{n+n}\right|$ (da $n \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq 1$) für alle $n \in \mathbb{N}$ divergiert diese Reihe nach dem Minorantenkriterium.

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Gegen Sie eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $\beta := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\iff \beta < 1$.

(b) Jede Folge von Intervallen $[a_n\,,\,b_n] \subset \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, dass

$$[a_{n+1}\,,\,b_{n+1}] \subset [a_n\,,\,b_n] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

definiert eine Intervallschachtelung.

(c) Jede streng monoton wachsende Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ hat eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion.

(d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} &\longmapsto \left\langle \vec{v}\,,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

linear und $\ker(f) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Lösung

(a) Die Aussage ist **falsch**!

Definiere z. B. $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent mit dem LK, aber $\beta = 1$.

(b) Die Aussage ist **falsch**!

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig, aber fest und definiere $a_n = a$ und $b_n = b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $b_n - a_n = b - a$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ kleiner als z. B. $\varepsilon := b - a > 0$.

(c) Die Aussage ist **falsch**!

Definiere z. B. $f : (a,b) \to \mathbb{R},\ f(x) := e^x$, dann ist f als Einschränkung der Exponentialfunktion zwar streng monoton wachsend, aber als Funktion nach $\mathbb{R}$ nicht surjektiv und somit nicht umkehrbar.

(d) Die Aussage ist **falsch**!

Obwohl der „Kern“ der Abbildung richtig angegeben ist, handelt es sich gar nicht um eine lineare Abbildung, da z.B. die Additivität verletzt ist:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Auch die Homogenität ist nicht erfüllt. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt:

$$f\left(\alpha\cdot\vec{v}\right) = \left\langle \alpha\cdot\vec{v}\,,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\left(\alpha\cdot\vec{v}\right) = \alpha^2\cdot\left\langle \vec{v},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\vec{v} = \alpha^2\cdot f\left(\vec{v}\right) \neq \alpha\cdot f\left(\vec{v}\right)\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Aufgabe 6

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie den Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ im Bogenmaß an.

(b) Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\}$ an.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vom Unterraum $U := \text{span}\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\}$.

(d) Beantworten Sie begründet: Ist $\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\}$ eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^4$?

Lösung

(a) Schon am Skalarprodukt $\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 + 8 - 6 - 4 = 0$

wird sichtbar, dass auch $\cos\left(\angle\left(v_1, v_2\right)\right) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \, \|v_2\|} = \frac{0}{\|v_1\| \, \|v_2\|} = 0$ gilt.

Damit beträgt der Winkel (Angabe im Bogenmaß) $\angle\left(v_1, v_2\right) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Da $v_1 \perp v_2$ aus **(a)** bekannt ist, normiere v_1 und v_2 zu: $c_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $c_2 = \frac{1}{\sqrt{1+16+9+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nun muss noch eine GramSchmidt-Operation auf v_3 erfolgen:

$$\begin{aligned} d_3 :&= v_3 - \langle v_3, c_1 \rangle c_1 - \langle v_3, c_2 \rangle c_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1-2-3+4}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-8+9-8}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \quad = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normieren liefert dann:

$$c_3 = \frac{d_3}{\|d_3\|} = \frac{1}{\frac{6}{5}\sqrt{1+1+9+9}}\frac{6}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\sqrt{5}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix}.$$

(c) Der Abstand eines Punktes zu einem Unterraum entspricht dem Unterschied (Abstand) des Punktes zu seiner orthogonalen Projektion in diesen Unterraum, es ist also

$$\| \, Q - P_E(Q) \, \| = \| \, Q - \langle Q, c_1 \rangle c_1 - \langle Q, c_2 \rangle c_2 \, \|$$

zu berechnen. Da $Q = v_3$ ist, gilt aber gerade $\|Q - P_E(Q)\| = \|d_3\|$
und dieser Wert ist aus **(b)** als $\frac{6}{5}\sqrt{20} = \frac{12}{5}\sqrt{5}$ bekannt.
Also beträgt der Abstand von Q zu U: $\frac{12}{5}\sqrt{5}$

(d) Nein, die Menge der **drei** linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$
kann keine Basis des **vierdimensionalen** Raumes $\mathbb{R}^4$ bilden, da jede Basis des $\mathbb{R}^4$ genau vier Elemente haben muss.