RWTH AACHEN
Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
WS 12/13

Klausur: Höhere Mathematik I

8. März 2013
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1 **[10 Punkte]**

Zeigen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Identität gilt:

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Lösung

IA): Überprüfe $A(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{n+k} \qquad o.k. \qquad \textbf{[1]}$$

IV): $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. **[1]**

IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} && \textbf{[2]}\\
&\overset{IV}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} && \textbf{[2]}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{2n+2}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2n+2}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} && \textbf{[3]}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh. $A(n)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. **[1]**

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \sqrt{9n^2+6} - 3n,\ n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz gegen Null.

Lösung

$$\begin{aligned}
0 &\le a_n && [\mathbf{1}]\\
&= \frac{9n^2+6-9n^2}{\sqrt{9n^2+6}+3n}\\
&= \frac{6}{\sqrt{9n^2+6}+3n} && [\mathbf{2}]\\
&= \frac{6}{n(\sqrt{9+6/n^2}+3)}\\
&\le \frac{1}{n}\\
&\longrightarrow 0 && [\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[10 Punkte]**

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$x_0 := \sqrt{2}\ , \quad x_{n+1} := \sqrt{2+x_n}\ , \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prüfen Sie, ob die Folge konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösung

- **Mögliche Grenzwerte:**
  Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiere gegen einen Wert $x \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow \quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+x_n} = \sqrt{2+x}$ $(*)$ **[1]**
  $\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$ oder $x = 2.$ **[2]**
  Da $x = -1$ die Gleichung $(*)$ nicht erfüllt, ist $x = 2$ einziger möglicher Grenzwert.
- **Beschränktheit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:**
  Offensichtlich gilt $x_n > 0\,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, so dass die Wurzel stets wohldefiniert ist.Zeige $\sqrt{2} \le x_n\,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$und $x_n \le 2\,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$: **[1]**
  IA: $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \le x_0 \le 2.$ **[1]**
  IV: $\sqrt{2} \le x_n \le 2$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$. **[1]**
  IS: $n \to n+1$. Es gilt:
  $$\sqrt{2} = \sqrt{2+\sqrt{0}} \le \sqrt{2+\sqrt{2}} \overset{\text{IV}}{\le} \sqrt{2+x_n} = x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \overset{\text{IV}}{\le} \sqrt{2+2} = 2.$$ **[1]**
  Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.
- **Monotonie von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:**
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, da gilt:
  $$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - x_n \overset{2\ge x_n}{\ge} \sqrt{x_n + x_n} - x_n = \sqrt{2x_n} - x_n \overset{2\ge x_n}{\ge} \sqrt{x_n x_n} - x_n = 0.$$ **[2]**
  Somit folgt die Monotonie.
- Aus Beschränktheit und Monotonie folgt die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, und zusammen mit der Tatsache, dass 2 der einzige mögliche Grenzwert ist, folgt: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$. **[1]**

Aufgabe 4 **[7 Punkte]**

Sei $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2$, gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in [-5,5]$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass

$$|f(x_0) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in [-5,5] \text{ mit } |x_0 - x| < \delta.$$

Lösung

Sei $x_0 \in [-5,5]$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta := \epsilon/10$. Für $x \in [-5,5]$ mit $|x_0 - x| < \delta$ gilt **[2]**

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= \left|x_0^2 - x^2\right| \\
&= |x_0 + x||x_0 - x| && \textbf{[1]} \\
&< |x_0 + x|\delta && \textbf{[1]} \\
&\le (|x_0| + |x|)\delta && \textbf{[1]} \\
&\le 10\delta = \epsilon. && \textbf{[2]}
\end{aligned}$$

Damit ist f stetig.

Aufgabe 5 **[11 Punkte]**

(a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2-n-2}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5^n}{3^n} \cdot x^n$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.

Lösung

(a) Setze $a_n := \dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n-2}$. Mit den Grenzwertsätzen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2/n+1/n^2}{1-1/n-2/n^2} = 1 \neq 0$. **[1]**

Wegen des Trivialkriteriums ist die Reihe divergent. **[1]**

(b) Wir setzen $a_n := \frac{n^4+5^n}{3^n}$ und berechnen den Konvergenzradius.

$1/r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{3} \cdot \frac{(n+1)^4/5^{n+1}+1}{1} \cdot \frac{1}{n^4/5^n+1} \overset{GWS}{=\!=} 5/3$. **[2]**

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = 3/5$. **[1]**

(c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$. **[2]**

NR: $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$, denn $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{n+3}{(n+2)\cdot(n+3)} - \dfrac{n+2}{(n+3)\cdot(n+2)}$. **[1]**

Betrachte Partialsummen: $\displaystyle\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+3}$

$\displaystyle= \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=6}^{N+1} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{5+2} - \frac{1}{N+1+2} \to \frac{1}{7},\ N \to \infty.$ **[2]**

Damit: $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = 1/7.$ **[1]**

Aufgabe 6 **[12 Punkte]**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem und bestimmen Sie den Kern der durch A induzierten linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(\underline{v}) := A\underline{v}$.

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \textbf{[4]}$$

Indem wir die ersten drei Spalten dieser Matrix betrachten, erhalten wir, dass für Vektoren $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ im Kern von A gelten muss

$$v_1 + 4v_2 + 2v_3 = 0 \text{ und } 4v_2 + 5v_3 = 0,$$

also $v_2 = -\frac{5}{4}v_3$ und $v_1 = 3v_3$. Daraus ergibt sich

$$\operatorname{Kern}(L) = \left\{ r \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \textbf{[4]}$$

Weiterhin lesen wir aus den Matrixumformungen über die kompletten vier Spalten ab, dass das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mehr als eine Lösung besitzt. Hierbei können wir eine Unbekannte frei wählen. Sei nun also $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ eine solche Lösung und setze $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -4x_2 - 2x_3 - 1 = -4\frac{1}{4}(-5t+2) - 2t - 1 = 5t - 2 - 2t - 1 = 3t - 3, \\ x_2 &= \frac{1}{4}(-5x_3 + 2) = \frac{1}{4}(-5t + 2). \end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist folglich

$$\mathbb{L} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \textbf{[4]}$$