Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
WS 12/13

Probeklausur: HM I

Januar 2013
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Zeigen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Hinweis: Sie können die folgende Identität verwenden: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Lösung
IA): Überprüfe $A(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{n}{k} = \binom{1}{1} = 1 = 2^1 - 1 \qquad o.k.$$

IV): $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 \\
&\overset{IV}{=} 2^n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \\
&= 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} = 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} \\
&= 2^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \overset{IV}{=} 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh. $A(n)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n^3}\binom{n}{3}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Lösung

$$\begin{aligned} a_n := \frac{1}{n^3}\binom{n}{3} &= \frac{1}{n^3}\frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{1}{6n^3}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}\frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 3
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$x_0 := a\ , \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\ , \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und es sei $1 < a \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob die Folge konvergiert, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Lösung

- **Mögliche Grenzwerte:**
  Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiere gegen einen Wert $x \in \mathbb{R}$.
  $$\Rightarrow \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (*) \tag{$*$}$$
  Falls $x = 0$, liefert $(*)$ keine Aussage, da der Grenzwert der rechten Seite nicht (ohne Weiteres) bestimmt werden kann.
  Falls $x \neq 0$, folgt aus $(*)$:
  $$x \ = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \ \Leftrightarrow\ x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \ \Leftrightarrow\ x^2 = a \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{a}$$
  Mögliche Grenzwerte sind also $-\sqrt{a}$, 0, $\sqrt{a}$.
- **Beschränktheit von** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$**:**
  Induktion ist hier eigentlich nicht nötig, da die obere Schranke nicht verwendet wird und die untere ohne Benutzung der IV folgt
  es gilt: $A(n):\ \sqrt{a} \leq x_n \leq a$. Beweis über vollständige Induktion:
  IA: $x_0 = a \ \Rightarrow\ \sqrt{a} \overset{a>1}{<} x_0 \leq a$
  IV: $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$
  IS: $n \to n+1$. Es gilt:
  $(x_{n+1})^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}x_n^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\frac{a^2}{x_n^2} = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 0$ und
  $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \overset{IV}{\leq} \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) \overset{\sqrt{a}>1}{\leq} \frac{1}{2}(a+a) = a$
  Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.
- **Monotonie von** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$**:**
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, da gilt:
  $x_{n+1} - x_n \leq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n \leq 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{a}{x_n} \leq 0 \ \Leftrightarrow\ x_n^2 \geq a$
  Die letzte Ungleichung ist aufgrund der Beschränktheit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt, und somit folgt die Monotonie.
- Aus Beschränktheit und Monotonie folgt die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Beschränktheit schließt die möglichen Grenzwerte 0 und $-\sqrt{a}$ aus. Daher gilt: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$

Aufgabe 4

Sei $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in [2, \infty)$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass

$$|f(x_0) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in [2, \infty) \text{ mit } |x_0 - x| < \delta.$$

Lösung

Sei $x_0 \in [2, \infty)$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta := \epsilon$. Für $x \in [2, \infty)$ mit $|x_0 - x| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(x)| &= \left|\frac{x_0}{x_0 - 1} - \frac{x}{x-1}\right| = \left|\frac{(x_0 x - x_0) - (x x_0 - x)}{(x_0 - 1)(x - 1)}\right| = \left|\frac{x - x_0}{(x_0 - 1)(x - 1)}\right| \\ &\leq |x - x_0| < \delta = \epsilon.\end{aligned}$$

Damit ist f stetig.

Aufgabe 5

(a) Überprüfen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{\log(n^2)}$.

(b) Finden Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2^n + \cos(n)}{3^n} \cdot x^n$.

(c) Geben Sie an, ob die folgende Reihe konvergiert oder divergiert: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\log(n)] \cdot [\log(\log(n))]^2}$.

Lösung

(a) Überprüfe die Reihe zunächst auf die Anwendbarkeit des Trivialkriteriums.
$\frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{\log(n^2)} = \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{2\log(n)} = \frac{(-1)^n}{2} \not\to 0,\ n \to \infty.$
Wegen des Trivialkriteriums ist die Reihe divergent.

(b) Wir setzen $a_n := \frac{n^3+2^n+\cos(n)}{3^n}$ und berechnen den Konvergenzradius.
$1/r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow 1/r = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^3/2^{n+1}+1+\cos(n+1)/2^{n+1}}{1} \cdot \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n^3/2^n+1+\cos(n)/2^n}$
$\overset{GWS}{\Longleftrightarrow} 1/r = 2/3 \Leftrightarrow r = 3/2.$
Der Konvergenzradius der Reihe ist $3/2$.

(c) Idee: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz. Überprüfe dazu zunächst die Voraussetzungen für dessen Anwendbarkeit: Setze $a_n := \frac{1}{n\cdot[\log(n)]\cdot[\log(\log(n))]^2}$. Da $\log(\cdot)$ monoton wächst, ist a_n eine antitone Nullfolge mit positiven Gliedern.
Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz zweifach(!) und berechne
$b_k = 2^k \cdot a_{2^k} = \frac{1/\log(2)}{k\cdot[\log(k\cdot\log(2))]^2}$ sowie
$c_j = 2^j \cdot b_{2^j} = \frac{1/\log(2)}{j^2\cdot[\log(2\cdot\log(2)^{1/j})]^2} \overset{[*]}{\leq} \frac{1/\log(2)}{j^2\cdot[\log(2\cdot\log(2))]^2}$.
Da die Reihe über $1/j^2$ konvergiert, konvergiert auch die in der Aufgabe gegebene Reihe.
$[*]$: $(\log(2)^{1/k})_{k\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton mit Grenzwert 1 für $k \to \infty$.
Damit ist $\log(2 \cdot \log(2)^{1/k}) \geq \log(2 \cdot \log(2))\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Mit anderen Worten: $[\log(2 \cdot \log(2)^{1/k})]^{-1} \leq [\log(2 \cdot \log(2))]^{-1}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Das ist aber $[*]$.

Aufgabe 6

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem und bestimmen Sie den Kern der durch A induzierten linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(\underline{v}) := A\underline{v}$.

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Indem wir die ersten drei Spalten dieser Matrix betrachten, erhalten wir, dass für Vektoren $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ im Kern von A gelten muss

$$3v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 0 \text{ und } -v_2 + v_3 = 0,$$

also $v_2 = v_3$ und $v_1 = -\frac{5}{3}v_2$. Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Kern}(L) = \left\{ r \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Weiterhin lesen wir aus den Matrixumformungen über die kompletten vier Spalten ab, dass das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mehr als eine Lösung besitzt. Hierbei können wir eine Unbekannte frei wählen. Sei nun also $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ eine solche Lösung und setze $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(-3x_2 - 2x_3 - 1) = \frac{1}{3}(-3(t+2) - 2t - 1) = -\frac{5}{3}t - \frac{7}{3}, \\ x_2 &= x_3 + 2 = t + 2. \end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist folglich

$$\mathbb{L} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$