Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
WS 12/13

Klausur: Höhere Mathematik I

27. März 2013
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1 **[10 Punkte]**

Zeigen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt:

$$A(n) : \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \log(n) - \log(n!).$$

Lösung

IA): Überprüfe $A(2)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(2) = 2 \cdot \log(2) - \log(2!) \qquad o.k. \qquad \textbf{[1]}$$

IV): $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. **[1]**

IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right) && \textbf{[1]}\\
&\overset{IV}{=} n \cdot \log(n) - \log(n!) + n \cdot (\log(n+1) - \log(n)) && \textbf{[2]}\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - \log(n+1) - \log(n!) && \textbf{[1]}\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - (\log(n+1) + \log(n!))\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - \log((n+1)!) && \textbf{[2]}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh. $A(n)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. **[2]**

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{3}}, \; n \in \mathbb{N},$$

konvergiert oder divergiert.

Lösung

$$\begin{aligned}
a_n &:= \frac{\frac{n!}{4!(n-4)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} \\
&= \frac{n!}{4!(n-4)!} * \frac{3!(n-3)!}{n!} && [\mathbf{1}] \\
&= \frac{6}{24}\frac{(n-3)!}{(n-4)!} && [\mathbf{1}] \\
&= \frac{1}{4}(n-3) && [\mathbf{1}] \\
&\longrightarrow \infty && [\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[10 Punkte]**

Für $a \in (0,1)$ sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$x_0 := a\ , \quad x_{n+1} := 1 - \sqrt{1-x_n}\ , \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prüfen Sie, ob die Folge konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösung

- **Mögliche Grenzwerte:**
  Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiere gegen einen Wert $x \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow \quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \sqrt{1-x_n} = 1 - \sqrt{1-x}$ **[1]**
  $\Rightarrow \quad 1 - x = (1-x)^2 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ oder $x = 1$. Beides sind mögliche Grenzwerte. **[2]**
- **Beschränktheit von** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$**:**
  Zeige $0 < x_n < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion **[1]**
  IA: $x_0 = a \in (0,1)$ ✓
  IV: $0 < x_n < 1$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ **[1]**
  IS: $n \to n+1$. Es gilt:
  $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n} \overset{\text{IV}}{<} 1 - \sqrt{1-1} = 1$, und **[1]**
  $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n} \overset{\text{IV}}{>} 1 - \sqrt{1-0} = 0.$ **[1]**
  Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.
- **Monotonie von** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$**:**
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, da gilt:
  $x_{n+1} - x_n = 1 - \sqrt{1-x_n} - x_n = (1-x_n) - \sqrt{1-x_n} < 0,$ **[1]**
  da $(1-x_n) \in (0,1)$ und daher $(1-x_n) < \sqrt{1-x_n}$. **[1]**
  Somit folgt die Monotonie.
- Aus Beschränktheit und Monotonie folgt die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Monotonie schließt eine Konvergenz gegen 1 aus. Daher ist der Grenzwert 0. **[1]**

Aufgabe 4 **[7 Punkte]**

Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$, gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in [1,\infty)$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass

$$|f(x_0) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in [1,\infty) \text{ mit } |x_0 - x| < \delta.$$

Lösung

Sei $x_0 \in [1,\infty)$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta := \epsilon$. Für $x \in [1,\infty)$ mit $|x_0 - x| < \delta$ gilt **[2]**

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right| \\ &= \left|\frac{x - x_0}{xx_0}\right| && \textbf{[1]} \\ &< \frac{\delta}{xx_0} && \textbf{[2]} \\ &\leq \delta = \epsilon. && \textbf{[2]} \end{aligned}$$

Damit ist f stetig.

Aufgabe 5 **[11 Punkte]**

(a) Überprüfen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{[\log(n)]^2}$.

(b) Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qx)^n}{2q}$, $q > 0$.

i) Bestimmen Sie die Menge K aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.
ii) Bestimmen Sie die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe divergiert.

(c) Konvergiert die folgende Reihe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$?

Lösung

(a) Setze $a_n := \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{[\log(n)]^2}$. Beachte, dass man den Bruch kürzen kann, und erhalte die Form $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\log(n)}$. $\log(\cdot)^{-1}$ ist monoton fallend gegen Null. **[2]**

Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe konvergiert. **[1]**

(b) Die $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qx)^n}{2q}$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (qx)^n$ konvergiert. **[1]**

Berechne den Konvergenzradius: $1/r = q^{n+1}/q^n = q \Leftrightarrow r = 1/q$. **[1]**

Betrachte die Randpunkte des Intervalls $[-1/q, 1/q]$:

Für $-1/q$ und $1/q$ divergiert die Reihe wegen des Trivialkriteriums. **[1]**

Damit gilt:

i) $K = (-1/q, 1/q)$. **[1]**
ii) $D = \mathbb{R} \setminus (-1/q, 1/q)$. **[1]**

(c) Setze $a_n := \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ und verwende das Quotientenkriterium. **[1]**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \overset{GWS,\ VL}{=\!=\!=} 3/e > 1$. Die Reihe divergiert. **[2]**

Aufgabe 6 **[12 Punkte]**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem und bestimmen Sie den Kern der durch A induzierten linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(\underline{v}) := A\underline{v}$.

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -10 & -2 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[4]

Indem wir die ersten drei Spalten dieser Matrix betrachten, erhalten wir, dass für Vektoren $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ im Kern von A gelten muss

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \text{ und } 6v_2 + 5v_3 = 0,$$

also $v_2 = -\frac{5}{6}v_3$ und $v_1 = -\frac{4}{3}v_3$. Daraus ergibt sich

$$\operatorname{Kern}(L) = \left\{ r \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \textbf{[4]}$$

Weiterhin lesen wir aus den Matrixumformungen über die kompletten vier Spalten ab, dass das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mehr als eine Lösung besitzt. Hierbei können wir eine Unbekannte frei wählen. Sei nun also $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ eine solche Lösung und setze $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_3 + 1 = -2\frac{1}{6}(-5t + 1) - 3t + 1 = \frac{1}{3}(5t - 1 - 9t + 3) = \frac{1}{3}(-4t + 2), \\ x_2 &= \frac{1}{6}(-5x_3 + 1) = \frac{1}{6}(-5t + 1). \end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist folglich

$$\mathbb{L} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \textbf{[4]}$$