RWTH AACHEN

Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80 94569
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
mwest@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
WS 13/14

07. Dezember 2013
Dauer: 60 Minuten

Probeklausur: HM I

Aufgabe 1 **[10 Punkte]**

Zeigen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt:

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \log(n) - \log(n!).$$

Lösung

IA): Überprüfe $A(2)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(2) = 2 \cdot \log(2) - \log(2!) \qquad o.k. \qquad \textbf{[1]}$$

IV): $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. **[1]**

IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right) && \textbf{[1]}\\
&\overset{IV}{=} n \cdot \log(n) - \log(n!) + n \cdot (\log(n+1) - \log(n)) && \textbf{[2]}\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - \log(n+1) - \log(n!) && \textbf{[2]}\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - (\log(n+1) + \log(n!))\\
&= (n+1) \cdot \log(n+1) - \log((n+1)!) && \textbf{[2]}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh. $A(n)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. **[1]**

Aufgabe 2 **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n^3}\binom{n}{3},\ n \in \mathbb{N}.$$

(b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \sqrt{9n^2+6} - 3n,\ n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz gegen Null.

Lösung

(a) Man hat

$$\begin{aligned} a_n := \frac{1}{n^3}\binom{n}{3} &= \frac{1}{n^3}\frac{n!}{3!(n-3)!} && \textbf{[1]}\\ &= \frac{1}{6n^3}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}\frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} && \textbf{[2]}\\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{6},\ \text{für } n\to\infty. && \textbf{[1]} \end{aligned}$$

(b) Man hat

$$\begin{aligned} 0 &\le a_n && \textbf{[1]}\\ &= \frac{9n^2+6-9n^2}{\sqrt{9n^2+6}+3n}\\ &= \frac{6}{\sqrt{9n^2+6}+3n} && \textbf{[2]}\\ &= \frac{6}{n(\sqrt{9+6/n^2}+3)}\\ &\le \frac{1}{n} \longrightarrow 0,\ \text{für } n\to\infty. && \textbf{[1]} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[10 Punkte]**

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie das $(\varepsilon, \delta)-$Kriterium der Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(b) Gegeben sei die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) := \sqrt{x}$.
Zeigen Sie mit dem $(\varepsilon, \delta)-$Kriterium dass g stetig auf $[0, \infty)$ ist.

(c) Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 2}{3(x-1)} & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Lösung

(a) Die Funktion f ist stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, falls **[1]**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0, \text{ so dass aus } |x - x_0| < \delta \text{ folgt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in [0, \infty)$.

1. Fall: $x_0 = 0$ dann wähle $\delta := \varepsilon^2$. Dann gilt für alle $x \in [0, \infty)$, mit $x < \delta$ sofort **[1]**

$$|g(x) - g(0)| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

2. Fall: $x_0 \in (0, \infty)$ in diesem Fall wähle $\delta := \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$, dann gilt für alle $x \in [0, \infty)$, mit $|x - x_0| < \delta$ **[1]**

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \\ &= \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| && \textbf{[1]} \\ &\le |x - x_0| \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} && \textbf{[1]} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

damit ist g stetig auf $[0, \infty)$.

(c) Da die Exponentialfunktion stetig ist, ist h auf dem Bereich $(-\infty, 1)$ stetig. Weiter sind rationale **[1]** Funktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich. Da aus $x > 1$ auch $3(x-1) > 0$ folgt, ist h auch auf dem Bereich $(1, \infty)$ stetig. Man muss also nur noch die Stetigkeit im Punkt $x = 1$ untersuchen. Man **[1]** hat

$$\lim_{x \nearrow 1} h(x) = \lim_{x \nearrow 1} e^{x-1} = e^0 = 1, \text{ sowie} \qquad \textbf{[1]}$$

$$\lim_{x \searrow 1} h(x) = \lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3(x-1)} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)} = \lim_{x \searrow 1} \frac{x+2}{3} = 1. \qquad \textbf{[1]}$$

Da aber $h(1) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 1} h(x)$ gilt, ist h im Punkt $x = 1$ nicht stetig. **[1]**

Aufgabe 4 **[8 Punkte]**

(a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2-n-2}$.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.

Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert, indem Sie zunächst in dem Ausdruck $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n^2+5n+6}$ die endliche Summe mittels Partialbruchzerlegung umschreiben („Teleskopsumme “).

Lösung

(a) Setze $a_n := \dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n-2}$. Mit den Grenzwertsätzen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2/n+1/n^2}{1-1/n-2/n^2} = 1 \neq 0$. **[1]**

Da a_n keine Nullfolge ist, ist die Reihe divergent. **[1]**

(b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$. **[2]**

NR: $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$, denn $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{n+3}{(n+2)\cdot(n+3)} - \dfrac{n+2}{(n+3)\cdot(n+2)}$. **[1]**

Betrachte Partialsummen: $\displaystyle\sum_{n=5}^{N} \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+3}$

$\displaystyle= \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=6}^{N+1} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{5+2} - \frac{1}{N+1+2} \to \frac{1}{7},$ für $N \to \infty$. **[2]**

Damit: $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = 1/7$. **[1]**