Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004

Höhere Mathematik I

Aufgabe 1: Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n \; = \; \frac{(-1)^n \sqrt{n} \; - \; 2^{n+1}}{5\sqrt{n} \; + \; 2^n} \; , \qquad n \in \mathbb{N} \; .$$

(3) **(a)** Man errate $\alpha \; := \; \lim\limits_{n\to\infty} \; a_n$;

(10) **(b)** Man beweise, daß α Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ bestimmt mit

$$n \; > \; N(\varepsilon) \; \Rightarrow \; |\alpha - a_n| \; < \; \varepsilon \; .$$

Aufgabe 2: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$f(x) \; := \; \frac{3}{x^n} \; + \; \log\,(1-x) \qquad (x \; < \; 0 \;\; \vee \;\; 0 \; < \; x \; < \; 1) \; .$$

(9) **(a)** Man beweise, daß f in $(0,1)$ genau eine Nullstelle besitzt.

(13) **(b)** Man beweise, daß f in $(-\infty, 0)$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(6) **(a)** $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\log\,(n!)} \; ;$$

(3) **(b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \; \sin \dfrac{1}{n}} \; ;$$

(4) **(c)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 \; + \; \dfrac{1}{n}\right)^n}{3^n \; - \; 2^n} \; .$$

Aufgabe 4: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche folgende Reihe konvergent ist:

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty} \Big((-1)^n \; n^2 \; + \; n \Big) \; x^n \; .$$

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 5: **(a)** Man bestimme eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g von

(7)

$$E_1 : \ \underline{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$E_2 : \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

(5) **(b)** Man bestimme die orthogonale Projektion $P_{E_1}(\underline{q})$ des Punktes $Q = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ auf die Ebene E_1.
