Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004
Höhere Mathematik I

W i e d e r h o l u n g s k l a u s u r

Aufgabe 1: Es sei $f\colon\ (0,\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)\ :=\ \frac{x^2-1}{|x-1|\sqrt{x}}\ .$$

(4) **(a)** Man bestimme den Zahlenwert g des linksseitigen Grenzwertes von f im Punkt $x=1$.

(12) **(b)** Man beweise, daß f auf $(2,\infty)$ gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta(\varepsilon)>0$ so angibt, daß gilt:

$$x_1,x_2\in(2,\infty)\ \wedge\ |x_1-x_2|\ <\ \delta(\varepsilon)\ \Longrightarrow\ \big|f(x_1)-f(x_2)\big|\ <\ \varepsilon\ .$$

Aufgabe 2: Es sei $f\colon\ (-2,0)\to\mathbb{R}$ mit

(13)

$$f(x)\ :=\ \log\ \frac{x^4-x^3+x^2-2x}{5}\ .$$

Man beweise, daß f in $(-2,0)$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(5) **(a)** $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1\ -\ \frac{2}{n!}\right)^{n!}\ ;$$

(6) **(b)** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(4n)!\ -\ \sqrt{n!}}\ ;$$

(4) **(c)** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{4^n+2^n}\ .$$

Aufgabe 4:

(7) **(a)** Man beweise: $\dfrac{1}{n}\ <\ e^{1/n}\ -\ 1\ <\ \dfrac{1}{n}\ e^{1/n}\quad(n\in\mathbb{N})$.

(7) **(b)** Man bestimme alle $x\in\mathbb{R}$, für welche die folgende Reihe konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-1\right)\ x^n\ .$$

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 5: Für $t \in \mathbb{R}$ wird das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

(12)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

betrachtet. Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die

$$\text{Rang } A = \text{Rang } (A, b) \leq 3$$

gilt und gebe die entsprechenden Lösungen $\underline{x}$ an.
