Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1998

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: (2,5) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\ .$$

Man beweise, daß f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$\big|f(x) \;-\; f(y)\big| \;<\; \varepsilon\ .$$

Aufgabe 2: (1) Zeigen Sie, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; x^5 - x^4 + \frac{17}{36}\,x^3 \;-\; \frac{1}{6}\,x^2 \;+\; \frac{1}{36}\,x \;-\; \frac{1}{1000}$$

wenigstens eine Nullstelle im Intervall $[-6, 6]$ besitzt.

Aufgabe 3: (2,5) Berechnen Sie

$$\textbf{(a)}\quad \int_2^3 \frac{x-7}{x^2 - 5x + 4}\,dx \quad ; \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \int x^2\ \sin(2x)\ dx \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Aufgabe 4: (1,5) Beweisen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx} - 1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ ,$$

für $x > 0$ konvergiert und für $x < 0$ divergiert.

Aufgabe 5: (3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ und $g : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f\big(f(x)\big)$.

Berechnen Sie Maximum und Minimum von g .

Aufgabe 6: (3) Mit Hilfe der Taylorformel zeige man für

$$f(x) \;=\; \int_0^x \sqrt{5 - \sin^2 y}\ dy \quad (x \in \mathbb{R})\ :$$

$$\big|f(x) - \sqrt{5}\,x\big| \;\le\; \frac{5}{48}\,\big|x\big|^3 \quad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Aufgabe 7: (2,5) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'' \;+\; 2u' \;-\; 3u \;=\; 16e^{-x} \quad (x > 0)\ , \\ u(0) \;=\; u'(0) \;=\; 1\ . \end{cases}$$
