Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2000

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 0]$.

(2) Man beweise:

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 + x_j\right) \;\geq\; 1 \;+\; \sum_{j=1}^{n} x_j \quad .$$

Aufgabe 2: Man beweise, daß die Gleichung

(1)
$$\frac{x^2+1}{x-1} \;+\; \frac{x^6+1}{x-2} \;=\; 0$$

mindestens eine Lösung $x_0 \in (1, 2)$ besitzt.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

(3)
$$f(x) \;:=\; \begin{cases} (x-1)^2 \;-\; 1 & \text{falls } x \;<\; 1 \\ -\sqrt{x-1} \;-\; 1 & \text{falls } x \;\geq\; 1 \quad . \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß zu f eine streng monoton fallende Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert ;

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion g explizit.

Aufgabe 4: Man berechne

(3) **(a)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Aufgabe 5: **(a)** Man bestimme alle Lösungen $u(x) \geq 1$ der Differentialgleichung

(1) $(*)$
$$u' \sqrt{x^2+1} \;=\; u \;\log u \qquad (x \in \mathbb{R}) \; .$$

(b) Man bestimme diejenige Lösung von $(*)$, welche $u(0) = e^2$ erfüllt.

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 6: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2) **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^n$.

Aufgabe 7: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n x^n$$

konvergiert.

Aufgabe 8: Gegeben seien die symmetrische Matrix

(3) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = A \cdot A \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man beweise, daß das Gleichungssystem

$$r_1 A + r_2 A^2 + r_3 E = O$$

nicht–triviale Lösungen $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ besitzt.
