Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1998

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Man berechne

(1,5)

$$I(a) \;=\; \int_0^1 \frac{1-e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}\;;$$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

(2)

$$f(x) \;:=\; x^7 \;+\; x^4 \;+\; 4x \;+\; 1\;.$$

Man beweise, daß zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert und berechne die Zahlenwerte $g(7)$, $g'(7)$, $g''(7)$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Riccatische Differentialgleichung

(3)

$$y' \;+\; y^2 \;=\; \frac{2}{x^2} \qquad (0 \;<\; x \;<\; \infty)\;.$$

(a) Man bestimme alle Lösungen der Gestalt $y = \frac{c}{x}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) Man bestimme eine Lösung mit $y(1) = 1$.

Aufgabe 4: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(1)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}\, x^n$$

konvergent ?

Aufgabe 5: Gegeben seien die Ebenen

(2)

$$\begin{array}{lcrcrcrcl} E_1 & : & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ E_2 & : & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 2\;. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß $g := E_1 \,\cap\, E_2$ eine Gerade ist, und geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.
Unter welchem Winkel schneiden sich E_1 und E_2 ?

---

b i t t e   w e n d e n !

Aufgabe 6: Gegeben sei das räumliche Gebiet

(1,5)

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < \tan y < z < \tan x < 1 \; ; \; x,y \in (0, \tfrac{\pi}{4})\right\} .$$

Man berechne

$$\iiint\limits_G \frac{dx\ dy\ dz}{1 + z^2} .$$

Aufgabe 7: Gegeben sei das Vektorfeld

(3,5)

$$\underline{a}(x,y,z) = (z^2 - x^2 - y^2 - 2)\,(x,y,z) \qquad \left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

und der Körper $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z > \sqrt{2 + x^2 + y^2} \; , \; 2 < z < 3\right\}$.

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechne man

$$\iiint\limits_K \operatorname{div} \underline{a}\ dx\ dy\ dz ,$$

indem man das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral verwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 8:

(3)

(a) Man bestimme eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, daß f die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

2) f bildet die Menge $\left\{z \;\middle|\; |z| < 1\right\}$ auf die Menge $\left\{w \;\middle|\; |w-1| < 1\right\}$ ab.

3) f bildet die Menge $\{-1, 0, 1\}$ auf die Menge $\left\{0, 2, \tfrac{1}{2}\right\}$ ab.

(b) Wie viele Abbildungen mit den Eigenschaften *1)* , *2)* und *3)* gibt es ? Begründung !

(c) Statt *3)* betrachte nun

3′) f bildet die Menge $\{-1, 0, 1\}$ auf $\left\{0, 2, -\tfrac{1}{2}\right\}$ ab.

Wie viele Abbildungen mit den Eigenschaften *1)* , *2)* und *3′)* gibt es ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9: Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man für $a \in \mathbb{R}^+$

(3,5)

$$I(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(a^2 + x^2)^2}\ dx .$$

Hinweis: Insbesondere ist die Existenz von $I(a)$ und das Verschwinden gewisser Randintegrale beim Grenzübergang nachzuweisen.
