Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2006

(90 Minuten)

Höhere Mathematik I

29.07.2006

L1)

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Das Standardskalarprodukt $< .,. >: \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist linear in beiden Komponenten.

(b) Das geometrische Mittel zweier nichtnegativer Zahlen a und $b \in \mathbb{R}$ ist echt kleiner als das arithmetische Mittel dieser Zahlen.

(c) Sei $V \neq \{\vec{0}\}$ Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\vec{0} \in V$ der Nullvektor. Dann gibt es mindestens einen Vektor $\vec{v} \in V$, so dass $\vec{0}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind.

(d) Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit Wertebereich $W(f) \subset [a,b]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

(e) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Verknüpfungen „+" und „·". Dann hat jedes $x \in \mathbb{K}$ inverse Elemente bezüglich „+" und „·".

(f) Jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

L2)

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$$

L3)

Aufgabe 3 [9 Punkte]

(a) **(4 Punkte)**
Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\left(x^4 + 10^4 x^2 - 64\cos^{40}(x)\right) \cdot \left(x^4 + 10^6 x^3 + 10^{10} x^2 + 1\right)^{-1}$$

für $x \to \infty$.

(b) **(5 Punkte)**
Berechnen Sie $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x)$ für

$$g(x) := 2 + x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \neq 0\,.$$

Bitte wenden!!

L4)

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Sei

$$f(x) := \begin{cases} \log(1+x^2)\,, & \text{für} \quad -4 < x \le 0 \\[1ex] \dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x}\,, & \text{für} \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

Man zeige, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, x_0) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$|x - x_0| < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad |\, f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$$

L5)

Aufgabe 5 **[12 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{2n+1}{n} x^n \;.$$ **(6 Punkte)**

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}\, x^{2n} \;.$$ **(6 Punkte)**

L6)

Aufgabe 6 **[9 Punkte]**

Die lineare Abbildung $L\colon V \to W$ sei bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ in $V = W = \mathbb{R}^2$ durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dargestellt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die L darstellende Matrix bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ in V und W und geben Sie $ker(L)$ und $im(L)$ an.

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2006
(90 Minuten)
Höhere Mathematik II
29.07.2006

L16)

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Jede Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die Lipschitz–stetig ist, ist auch gleichmäßig stetig.

(b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, kommutieren A und $\exp(A)$, d.h. $A\exp(A) = \exp(A)\,A$.

(c) Die Lösungen $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$ von $u' = Au$, $t \in \mathbb{R}$, für eine vorgegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, bilden einen n–dimensionalen Vektorraum.

(d) Das Integral $I\colon C_{st}[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ ist eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen.

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Dann existiert eine untere Dreiecksmatrix L mit sämtlichen Einträgen auf der Diagonalen gleich 1 und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = L \cdot R$.

(f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = 0$, eine eindeutige Lösung.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

L17)

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der zugehörigen Eigenräume von A.

L12)

Aufgabe 3 [9 Punkte]

Man berechne mit de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(x) - x}{\sqrt{x^2+1} - 1}.$$

Hinweis: $\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Bitte wenden!!

L13) **Aufgabe 4 [13 Punkte]**

(a) (4 Punkte)
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2}\, dx$$

(b) (9 Punkte)
Existieren folgende uneigentliche Integrale?

$$\int_0^1 \frac{\tan(x)}{\sqrt{x^3}}\, dx$$ **(4 Punkte)**

und

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$ **(5 Punkte)**

L14) **Aufgabe 5 [9 Punkte]**

Mit Hilfe der Taylorformel beweise man

$$\Big|\arctan(x) - \sin(x)\Big| \leq \frac{5}{2}x^2 \quad \text{für alle} \quad x \in [-2, 2]\,.$$

L15) **Aufgabe 6 [8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung für $u = u(x)$:

$$u' + x^2 u = x^2 e^{-x^3}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2006
(120 Minuten)
Höhere Mathematik I + II
29.07.2006

L7)

Aufgabe 1 [6 Punkte]
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Das Standardskalarprodukt $< .,. >\colon\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist linear in beiden Komponenten.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Dann existiert eine untere Dreiecksmatrix L mit sämtlichen Einträgen auf der Diagonalen gleich 1 und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = L \cdot R$.

(c) Jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

(d) Jede Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die Lipschitz–stetig ist, ist auch gleichmäßig stetig.

(e) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, kommutieren A und $\exp(A)$, d.h. $A\exp(A) = \exp(A)\,A$.

(f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = 0$, eine eindeutige Lösung.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

L8)

Aufgabe 2 [4 Punkte]
Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)^{99}.$$

L4)

Aufgabe 3 [12 Punkte]
Sei

$$f(x) := \begin{cases} \log(1+x^2)\,, & \text{für } -4 < x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x}\,, & \text{für } \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

Man zeige, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, x_0) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$|x - x_0| < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

L9)

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{2n+1}{n} x^n .$$

Bitte wenden!!

L10)

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Sei $(P_1, < \cdot, \cdot >)$ der Skalarproduktraum der Polynome vom Grad höchstens eins und

$$< p, q > \; := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

für $p, q \in P_1$. Berechnen Sie mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens aus der Standardbasis $\mathcal{L} := \{1, x\}$ von P_1 eine Orthonormalbasis.

L11)

Aufgabe 6 [8 Punkte]

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der zugehörigen Eigenräume von A.

L12)

Aufgabe 7 [9 Punkte]

Man berechne mit de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(x) - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Hinweis: $\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

L13)

Aufgabe 8 [4 Punkte]

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2}\, dx$$

L14)

Aufgabe 9 [9 Punkte]

Mit Hilfe der Taylorformel beweise man

$$\left|\arctan(x) - \sin(x)\right| \leq \frac{5}{2} x^2 \quad \text{für alle} \quad x \in [-2, 2].$$

L15)

Aufgabe 10 [8 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung für $u = u(x)$:

$$u' + x^2 u = x^2 e^{-x^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2006
(180 Minuten)
Höhere Mathematik I + II
29.07.2006

L7)

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Das Standardskalarprodukt $< .,. >: \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist linear in beiden Komponenten.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Dann existiert eine untere Dreiecksmatrix L mit sämtlichen Einträgen auf der Diagonalen gleich 1 und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = L \cdot R$.

(c) Jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

(d) Jede Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die Lipschitz–stetig ist, ist auch gleichmäßig stetig.

(e) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, kommutieren A und $\exp(A)$, d.h. $A\exp(A) = \exp(A)\,A$.

(f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = 0$, eine eindeutige Lösung.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

L1)

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$$

L3)

Aufgabe 3 [9 Punkte]

(a) (4 Punkte)
Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\left(x^4 + 10^4x^2 - 64\cos^{40}(x)\right) \cdot \left(x^4 + 10^6x^3 + 10^{10}x^2 + 1\right)^{-1}$$

für $x \to \infty$.

(b) (5 Punkte)
Berechnen Sie $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x)$ für

$$g(x) := 2 + x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \neq 0\,.$$

Bitte wenden!!

L4)

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Sei
$$f(x) := \begin{cases} \log(1+x^2)\,, & \text{für } -4 < x \le 0 \\ \dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x}\,, & \text{für } \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

Man zeige, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, x_0) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$|x - x_0| < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

L5)

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{2n+1}{n} x^n \,.$$ **(6 Punkte)**

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n} x^{2n} \,.$$ **(6 Punkte)**

L10)

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Sei $(P_1, <\cdot,\cdot>)$ der Skalarproduktraum der Polynome vom Grad höchstens eins und

$$<p,q> := \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$$

für $p, q \in P_1$. Berechnen Sie mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens aus der Standardbasis $\mathcal{L} := \{1, x\}$ von P_1 eine Orthonormalbasis.

L17)

Aufgabe 7 [18 Punkte]

(a) (8 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der zugehörigen Eigenräume von A.

(b) (8 Punkte)
Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ angeben mit

$$A = S\,D\,S^{-1}\,.$$

(c) (2 Punkte)
Berechnen Sie A^{2006}.

Bitte wenden!!

L12)

Aufgabe 8 **[9 Punkte]**

Man berechne mit de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(x) - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} .$$

Hinweis: $\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) , \quad x \in \mathbb{R}$

L13)

Aufgabe 9 **[13 Punkte]**

(a) **(4 Punkte)**
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2} \, dx$$

(b) **(9 Punkte)**
Existieren folgende uneigentliche Integrale?

$$\int_0^1 \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}} \, dx$$ **(4 Punkte)**

und

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\sqrt{x}} \, dx$$ **(5 Punkte)**

L14)

Aufgabe 10 **[9 Punkte]**

Mit Hilfe der Taylorformel beweise man

$$\left| \arctan(x) - \sin(x) \right| \leq \frac{5}{2} x^2 \quad \text{für alle} \quad x \in [-2, 2] .$$

L15)

Aufgabe 11 **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung für $u = u(x)$:

$$u' + x^2 u = x^2 e^{-x^3} , \quad x \in \mathbb{R}$$

Musterlösung zur HöMa I Klausur

L1: Aufgabe 1, **L1**

a) f

b) f

c) f

d) w

e) f

f) w

L2: Aufgabe 2 L2

Beweis mittels vollständiger Induktion

IA: $n=1$

1 $$\sum_{k=1}^{1} k\cdot(k!) = 1\cdot 1! = 1$$

$$(1+1)!-1 = 2-1 = 1$$

1 IB: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ so daß
$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)!-1$$

IS: $n \leadsto n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,(k!) = \sum_{k=1}^{n} k\,(k!) + (n+1)(n+1)!$$

4

$$\overset{(IB)}{=} (n+1)!-1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+2)(n+1)!-1 = (n+2)!-1$$

L3: Aufgabe 3, L3

a)

$$\frac{x^4 + 10^4 x^2 - 64\cos^{40}(x)}{x^4 + 10^6 x^3 + 10^{10} x^2 + 1}$$

$$= \frac{1 + \overbrace{10^4 \frac{1}{x^2}}^{\to 0} - \overbrace{64 \frac{1}{x^4} \cos^{40}(x)}^{\to 0,\ x\to\infty}}{1 + \underbrace{10^6 \frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} + \underbrace{10^{10} \frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

4

b)

$$g(x) = 2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

$$= 2 + (-1)\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \qquad \text{da } x < 0$$

$$= 2 - \sqrt{x^2 + 4}$$

4

$$\Rightarrow \lim_{x \uparrow 0} g(x) = 0$$

1

L4: Aufgabe 4, L4

1 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir betrachten $x \in (-\delta_0, \delta_0)$, wobei $0 < \delta_0 < 4$ noch zu wählen ist.

Falls $x \in (-\delta_0, 0)$:

$$|f(x) - f(0)| = \log(1+x^4)$$
$$\leq x^2 \quad 2$$

1 $\Rightarrow$ Für $\delta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad 1$$

Falls $x \in (0, \delta_0)$:

$$|f(x) - f(0)| = \left|\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x}\right|$$

2 $$= \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x} \quad \text{, falls } \delta_0 < 1$$

1 $$\leq \frac{c\,x}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} \quad \text{, für eine Konstante } c > 0$$

2 $$\leq \frac{c\,x}{\sqrt{x}} \quad \text{, falls } \delta_0 < 1$$

$$= c\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ Für $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{1, \frac{\varepsilon^2}{c}\}$ gilt: 1

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

Damit gilt $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für $x \in (-\delta_0, \delta_0)$ mit $\delta_0 = \min\{\frac{\varepsilon^2}{2c}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\}$

1

L5 Aufgabe 5, L5

a) Quotientenkriterium: 1

$$\alpha := \left| \frac{2^{n+1} \binom{2n+3}{n+1} x^{n+1}}{2^n \binom{2n+1}{n} x^n} \right| = 2|x| \frac{(2n+3)! \quad n! \; (n+1)!}{(n+1)! \; (n+2)! \; (2n+1)!}$$ 2

$$= 2|x| \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 8|x|$$ 2

$$\alpha < 1 \iff |x| < \frac{1}{8}$$ 1

b) $\cancel{\alpha = \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} \ldots x^{2n}}$ Wurzelkriterium: 1

$$B := \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{3^n} x^{2n}} = \frac{1}{3}|x|^2 \sqrt[n]{n^2+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{3}|x|^2$$ 3

$$B < 1 \iff |x| < \sqrt{3}$$ 2

L6:

Aufgabe 6: **L6**

- $L_{b,b} = BAB^{-1}$ mit $B = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1

- Es ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2

- Es folgt $\underline{\underline{L_{b,b} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}}$. 4

- Es folgt $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, 1

  $\ker(L) = \{0\}$ 1

L7:

Aufgabe 1 , L7

a) F

b) F

c) W

d) W

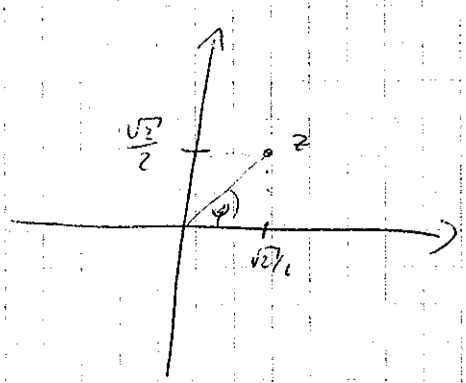
e) W

f) F

L8: Aufgabe 2, L8 [Hö Ma I + II, 120]

Polardarstellung von $z = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$:

$$\left|\frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1 \qquad 1$$



$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi/4 \qquad 1$$

$$\Rightarrow z = e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow z^{99} = e^{i\pi\, 99/4} \qquad 1$$

$$= \cos\left(\frac{99}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{99}{4}\pi\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z^{99}) = \cos\left(\frac{99}{4}\pi\right) = \cos\left(24\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z^{99}) = \sin\left(\frac{99}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}/2$$

1

L9 , Aufgabe 4, L9

Quotientenkriterium: 1

- $\alpha = \left| \frac{2^{n+1} \binom{2n+3}{n+1} x^{n+1}}{2^n \binom{2n+1}{n} x^n} \right| \overset{2}{=} 2|x| \frac{(2n+3)!\ n!\ (n+1)!}{(n+1)!\ (n+2)!\ (2n+1)!}$

$$= 2|x| \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+1)} \longrightarrow 8|x| \quad 2$$

- $\alpha < 1 \iff |x| < \frac{1}{8}$ 1

L10 Aufgabe 5, L10

- $\| p \| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$

- $p_1(x) = \frac{1}{\|1\|} = 1$ 2

- $p_2(x) = \frac{x - \langle x, p_1 \rangle p_1}{\| x - \langle x, p_1 \rangle p_1 \|}$ 2

$$= \frac{x - \frac{1}{2}}{\| x - \frac{1}{2} \|} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$ 2

L11 Aufgabe 6, L11

- $\det(A-\lambda I) = (-1-\lambda)(1-\lambda)^2$ (2)

$\Downarrow$ E.W. sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ (1)

- E_{λ_1} bestimmen:

  - $(A+I)x = 0 \iff x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$

(2)

  - Es folgt $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (1)

- E_{λ_2} bestimmen:

  - $(A-I)x = 0 \iff -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

  - Es folgt $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (2)

L12

Aufgabe 3 L12

$f(x) = \operatorname{arsinh}(x) - x \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$g(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 1$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ 1

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ 1

$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \neq 0$ für $x \neq 0$ 1

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ 1

Betrachte also noch die 2. Ableitungen:

$f''(x) = -\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}^3} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}$ 1

$g''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^3}$ 1

$g''(x) \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} -x = 0$ 2

$\underset{L'H.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \quad \underset{L'H.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 1

L13 Aufgabe 4 L13

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+2}\,dx \overset{\substack{y=\sin(x)\\ dy=\cos(x)dx}}{=} \int_0^1 \frac{1}{y^2+2}\,dy$ (2)

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2)

(b) Mit Mittelwertsatz gilt $\forall\, x \in (0,1]$

$\tan(x) - \tan(0) = \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(\xi)} \cdot x \le \underbrace{\frac{1}{\cos^2(1)}}_{c} x$

für ein $\xi \in (0,x)$

$\Rightarrow \left|\frac{\tan(x)}{\sqrt{x}^3}\right| \overset{(1)}{\le} \frac{c\,x}{\sqrt{x}^3} \overset{(3)}{=} \frac{c}{\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in (0,1)$

und $\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx$ uneigentl. Riemann-intbar.

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}^3}\,dx$ ist uneigentl. intbar.

(c)

$f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ (1) $\quad x \in [1,\infty)$

f stetig

Betrachte $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \sin(t)\cos(t)\,dt$

$\overset{\substack{y=\sin(t)\\ dy=\cos(t)dt}}{=} \int_{\sin(1)}^{\sin(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\underbrace{\sin^2(1)}_{>0}$

$\le \frac{1}{2} \quad \forall\, x \in [1,\infty)$ (3)

$\Rightarrow F$ ist beschränkt $\forall\, x$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ ist uneigentlich intbar. (1)

L14 Aufgabe 5, L14

- Setze $f(x) = \arctan(x) - \sin(x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \sin(x) \quad (1)$$

- Nach Taylorformel gilt

(2) $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2$$; für ein ξ zwischen 0 und x (1)

$$= \frac{1}{2} f''(\xi)x^2 \quad (2)$$

- Es folgt, daß für $x \in [-2,2]$ gilt

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2} + \sin(\xi) \right| x^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(|4| + |1| \right) x^2$$

$$\leq \frac{5}{2} x^2 \quad (3)$$

L15 Aufgabe 6: L15

$u' + x^2 u = x^2 \cdot e^{-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$ lineare Dgl. 1

$a(x) = x^2$, $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^3}$, $A(x) \in \int x^2 \, dx$

mit $A(x) = \frac{1}{3} x^3$ 1

$$\Rightarrow u_{inh} = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) \, dx$$ 2

$$= e^{-\frac{1}{3}x^3} \int e^{1/3 x^3} \cdot x^2 \cdot e^{-x^3} \, dx$$

$$= e^{-1/3 x^3} \int e^{-2/3 x^3} \cdot x^2 \, dx$$

$$= e^{-1/3 x^3} \left(-\frac{1}{2} e^{-2/3 x^3} + c \right)$$

4

Lösung zur HöMa I Klausur SS 2006

L16 Aufgabe 1 , L16

(a) wahr

(b) wahr

(c) wahr

(d) wahr

(e) falsch

(f) falsch

L17 Aufgabe 2 L17

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E_3) = -(1-\lambda)(9-\lambda^2) = (\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda-3) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \lor \lambda = 3 \lor \lambda = -3$

$\Rightarrow$ A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$ 4

Eigenvektoren:

zu λ_1:

$(A - E_3)\cdot\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

2 $\quad \land \quad 4x_1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \land x_2 = -2x_3$

$\Rightarrow \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist Basis des Eigenraums zum Eigenwert 1.

1

zu λ_2:

$(A - 3E_3)\,\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$\land \quad -3x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0, \; x_1 = \frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ist Basis des Eigenraums zum Eigenwert 3

1

zu λ_3:

$(A + 3E_3)\,\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$\land \quad 4x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -x_3, \; x_2 = 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist Basis des Eigenraums zum Eigenwert -3.

1