

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n k^2 > \frac{1}{3} n^3 + n \quad (n = 2, 3, 4, \dots) .$$

Aufgabe 2: Man zeige, dass die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$(6) \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \cos(n\pi)}$$

konvergent mit dem Grenzwert $a = 1$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ so bestimmt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$(2) \quad (a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n!)} \quad ,$$

$$(3) \quad (b) \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \log(n!)} \quad ,$$

$$(3) \quad (c) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)} \quad .$$

Aufgabe 4:

(2) (a) Man beweise, dass die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{linear unabhängig sind.}$$

(4) (b) Man stelle $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a, b und c dar.

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \cos x - \cos(2x) + 2 \cos^3 x, \quad 0 < x < \pi .$$

(4) (a) Man zeige: zu $y = f(x)$ existiert in $0 < x < \pi$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$.

(4) (b) Man berechne die Zahlenwerte $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$.

Aufgabe 6: Man beweise: $2 \log \cosh x > x \cdot \tanh x \quad (x \neq 0)$.

(8) **Hinweis:** Es mag nützlich sein, die Funktion

$$f(x) := 2 \log \cosh x - x \cdot \tanh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

auf strikte Konvexität zu untersuchen.

Aufgabe 7: Man berechne:

(4) (a)
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x(1 + \sqrt{x})}},$$

(6) (b)
$$\int_{-3}^{-2} \frac{4 dx}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Aufgabe 8: Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung

(8)
$$u' = \frac{\tan u}{1 + \tan^2 u} \cdot \frac{\sin x}{4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit
$$u(0) = \frac{\pi}{4},$$

und zeige, dass

$$0 < u(x) < \frac{\pi}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Aufgabe 9: Es sei $a > 0$, $A > 0$ und

$$I(a, A) := \int_a^A \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx.$$

(3) (a) Man berechne den Zahlenwert $I(a, A)$ für $a > 0$ und $A > 0$.

(3) (b) Man berechne für festes $A > 0$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} I(a, A) = \int_0^A \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx.$$

(3) (c) Man zeige: für jedes feste $a \in (0, 1]$ und $A \geq e^3$ gilt $I(a, A) \geq 2\sqrt{A}$ und damit

$$\int_a^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \infty.$$
