

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{k} > \frac{1}{2} n\sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 2: Es sei $f: (-4, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} \log(1 + 2x^2) & \text{für } -4 < x \leq 0, \\ \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} - x} & \text{für } 0 < x < 4. \end{cases}$$

Man beweise, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$(2) \quad \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n!} \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{n!},$$

$$(3) \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{(2n)!}}{5^n}.$$

Aufgabe 4: Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren der Matrix

$$(12) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log \cosh x}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(2) (a) Man zeige, dass f in $x = 0$ stetig ist.

(3) (b) Man berechne $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Aufgabe 6: Man zeige, dass die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 7:

(4) (a) Man berechne $\int x \cdot \operatorname{artanh} x \, dx$ ($|x| < 1$).

(3) (b) (α) Man zeige: $I := \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx < \frac{2}{3}$
(z.B. mit dem (erweiterten) Mittelwertsatz der Integralrechnung).

(3) (β) Man zeige: $I = \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})$.

Aufgabe 8: Mit Hilfe der Taylorformel zeige man:

(6) $|x| < 10^{-2} \implies |\arctan(x^2) - x^2| < 10^{-12}$.

Aufgabe 9: (a) Man errate eine Lösung $u_1 \not\equiv 0$ der Differentialgleichung

(4) $Du \equiv u'' - \frac{2}{x^2} u = 0$ ($x > 0$)

und bestimme die Lösungsgesamtheit von $Du = 0$.

(b) Man löse das Anfangswertproblem

(6)
$$\begin{cases} u'' - \frac{2}{x^2} u = 60x^2 + 48x & (x \geq 1), \\ u(1) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 10: Durch den Graphen $G(f)$ mit

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 5 + 2x - 2y - \frac{9}{2}xy$$

ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 gegeben.

(2) (a) Man bestimme die Tangentialebene E_1 von $G(f)$ im Punkt $P_1 = (0, 0, 5)$.

(2) (b) Man bestimme den Abstand des Nullpunktes $(0, 0, 0)$ von E_1 .

(3) (c) Man gebe — sofern möglich — einen Punkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \neq P_1$ mit $x_2 = 2$ an, für den die Tangentialebene E_2 von $G(f)$ orthogonal zu E_1 ist.
