Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Winter 2007
(90 Minuten)
Höhere Mathematik II
28.02.2007

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist invertierbar.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich. Dann gilt $\det(A) = \det(B)$.

(c) Sei $M \subset \mathbb{R}$ offen und $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:
$f'(x) = 0$ für alle $x \in M \iff f(x) = C$ für alle $x \in M$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ist konvergent.

(e) Jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$ ist gleich ihrer Taylor–Reihe entwickelt um $x_0 = 0$.

(f) Ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung ist korrekt gestellt, wenn es genau eine Lösung gibt.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix *(5 Punkte)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Ist A diagonalisierbar? (Begründung!) Falls ja, gebe man eine Diagonalform, bzw. falls nein, eine Jordansche Normalform von A an. *(4 Punkte)*

Bemerkung: Die Berechnung der dazugehörigen Transformationsmatrix ist nicht erforderlich.

Bitte wenden!!

Aufgabe 3 **[8 Punkte]**

Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung , dass

$$\left|e^x \sin(x) - e^y \sin(y)\right| \leq e^{\frac{\pi}{2}}|x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{gilt} .$$

Aufgabe 4 **[8 Punkte]**

(a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Wie ist $f(0)$ zu wählen, damit f auch bei $x_0 = 0$ stetig ist? *(4 Punkte)*

(b) Ist das durch Wahl in **(a)** stetig bei $x_0 = 0$ ergänzte f in x_0 differenzierbar? Falls ja, berechne man $f'(0)$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 5 **[15 Punkte]**

Berechnen Sie die Werte der Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log|x|\, dx$ *(5 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{8}{(4 - x^2)(4 + x^2)}\, dx$ *(10 Punkte)*

Aufgabe 6 **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\left(e^x + \log(x)\right) y' = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) y \ , \quad x > 0 \, ,$$

zum Anfangswert $y(1) = -e^{-1}$.

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Winter 2007
(120 Minuten)
Höhere Mathematik I + II
28.02.2007

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist jede stetige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(b) Durch Umordnungen der Summanden einer Reihe wird im Allgemeinen das Konvergenzverhalten verändert.

(c) Ist $L\colon V \to W$ linear und injektiv, dann gilt $\dim ker(L) + \dim W = \dim V$.

(d) Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist invertierbar.

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ist konvergent.

(f) Jede Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$ ist gleich ihrer Taylor–Reihe entwickelt um $x_0 = 0$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 **[10 Punkte]**

Zeigen Sie, dass

$$f(x) := \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

auf I gleichmäßig stetig ist, indem Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ angeben, so dass

$$|x - y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x, y \in I\,.$$

Aufgabe 3 **[11 Punkte]**

(a) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{8^{k+\frac{1}{3}}}$ konvergiert und berechne den Wert der Reihe. *(4 Punkte)*

(b) Man bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihe $\displaystyle f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}\, z^k\,.$ *(7 Punkte)*

Bitte wenden!!

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & t-1 & 3 \end{pmatrix}$$

sei die lineare Abbildung $\alpha_t \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto A_t x$, gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Kern von α_t.

Aufgabe 5

[9 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix *(5 Punkte)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Ist A diagonalisierbar? (Begründung!) Falls ja, gebe man eine Diagonalform, bzw. falls nein, eine Jordansche Normalform von A an. *(4 Punkte)*

Bemerkung: Die Berechnung der dazugehörigen Transformationsmatrix ist nicht erforderlich.

Aufgabe 6

[8 Punkte]

Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung , dass

$$\left|e^x \sin(x) - e^y \sin(y)\right| \le e^{\frac{\pi}{2}}|x-y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ gilt.}$$

Aufgabe 7

[10 Punkte]

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_3^\infty \frac{8}{(4-x^2)(4+x^2)}\, dx .$$

Aufgabe 8

[8 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\left(e^x + \log(x)\right) y' = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) y\ , \quad x > 0\,,$$

zum Anfangswert $y(1) = -e^{-1}$.

Aufgabe 1 (HM II)

a) W

b) W

c) f

d) W

e) W

f) f

Aufgabe 1 (HM I + II)

a) f

b) w

c) f

d) w

e) w

f) w

Aufgabe 2 (HM II), Aufgabe 5 (HM I+II)

a) $CP_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2-\lambda & 3/2 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) \qquad 1$$

$\Rightarrow$ A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = -1$ mit alg. Vielfachheit 1. 2

Bestimme die zugehörigen Eigenräume:

$$\text{kern}(A - 2I) = \text{kern} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -3/2 & 3/2 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}}_{\text{rang}=2}$$

$$= \{(0, 1, 1)\}.$$

$$\text{kern}(A + I) = \text{kern} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & 3/2 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}}_{\text{rang}=2}$$

$$= \{(0, 1, -1)\}$$

$\Rightarrow \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \mathrm{Span}\{(0,1,1)\}$ (1)

$\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \mathrm{Span}\{(0,-1,1)\}$ (1)

b) Aus a) folgt: $\dim \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = 1 = n_{geo}(\lambda_1)$

$\Rightarrow n_{alg}(\lambda_1) \neq n_{geo}(\lambda_1)$

$\Rightarrow$ A ist nicht diagonalisierbar (2)

$\Rightarrow$ Jordanform ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2)

Aufgabe 2 (HM I + II)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Weiter seien $x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit $x \neq y$.

Betrachte:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} \right|$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}$$

$$\overset{(1)}{=} |x-y| \frac{|x+y|}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}$$

Aus $x^2, y^2 \leq \frac{1}{4}$ folgt $\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \frac{|x| + |y|}{\sqrt{3}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} |x-y| \quad (2)$$

Wähle $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{3} \cdot \varepsilon$ (1)

$\Rightarrow \forall x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Aufgabe 3 (HM I + II)

a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{8^{k+\frac{1}{3}}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{8^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k - 1 + \frac{3}{8} \right) = (*)$$

Da $\left|\frac{-3}{8}\right| < 1$ (2) konvergiert die geometrische Reihe:

$$(*) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{3}{8}} - 1 + \frac{3}{8} \right) = \frac{9}{176} \quad (1)$$

b) Wende Quotientenkriterium an:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \overset{(2)}{=} \left| \frac{(k+1)^{k+1} \quad z^{k+1} \quad k!}{(k+1)! \quad k^k \quad z^k} \right|$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{(k+1)^k}{k^k} |z| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k |z|$$

$$\xrightarrow[k \to \infty]{} e\,|z| \quad (2)$$

$$e\,|z| < 1 \iff |z| < \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{e}$ (1)

Aufgabe 3 (HM II), Aufgabe 6 (HM I + II)

Betrachte $f(x) := e^x \sin(x)$.

Offensichtlich ist f differenzierbar auf $(0, \pi/2)$ und stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Seien $x, y \in [0, \pi/2]$ beliebig.

Dann folgt mit dem MWS der Differentialrechnung:

(1) $\exists\ \xi$ zwischen x und y so daß

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x-y) \qquad (3)$$

gilt.

Bestimme das Maximum von f':

$$f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

$$f''(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$$

$$= 2e^x \cos(x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$$

Weiter hat f' einen Vorzeichenwechsel von + nach − in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ In $x = \frac{\pi}{2}$ liegt ein Maximum vor.

$$\Rightarrow f'(\xi) \leq f'(\pi/2) = e^{\pi/2} \qquad (4)$$

Damit folgt

$$|e^x \sin(x) - e^y \sin(y)| = |f'(\xi)|\ |x-y|$$

$$\leq e^{\pi/2}\ |x-y|$$

Aufgabe 4 (HM II)

a) Betrachte $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \overset{2}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}$

$= \frac{1}{2}$ 2

da $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

b) Betrachte Differenzenquotient von f in x_0

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} \overset{1}{=} \frac{\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) - x^2}{2x^3}$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} \overset{1}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) x - 2x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1}{3x}$$

Erneute Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1}{3x} \overset{1}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) x}{3} = 0$$

1

Die Vor. der Regel von de l'Hospital sind erfüllt, der Grenzwert existiert und ist gleich 0.

$\Rightarrow f$ diffbar in 0 und $f'(0) = 0$.

Aufgabe 4 (HM I + II)

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & t-1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & t-1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} = (*)$$

5

$\Rightarrow \text{kern}(\alpha_t) = \{0, 0, 0, 0\}$ falls $t \neq 0 \wedge t \neq 1$

1

Falls $t = 0$:

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kern}(\alpha_0) = \text{span}\{(-6, 0, 3, 1)\}$$

2

Falls $t = 1$:

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kern}(\alpha_1) = \text{span}\{(-1, 0, 1, 0)\}$$

2

Aufgabe 5 (HM II)

a) $\int_{-1}^{1} \log|x|\, dx \overset{①}{=} 2\int_0^1 \log x\, dx$, da $\log|x|$ achsensymm.

$\overset{②}{=} 2\lim_{a\downarrow 0} \int_a^1 \log x\, dx$

$\overset{①}{=} 2\lim_{a\downarrow 0} [x\log x - x]_a^1$

$= 2\lim_{a\downarrow 0} [-1 - a\log a - a] = -2$, ①

da $\lim_{a\downarrow 0} a\cdot \log(a) = 0$.

b) (Aufgabe 6 (HM I+II))

$$\int_3^\infty \frac{8}{(4-x^2)(4+x^2)}\, dx = \int_3^\infty \frac{8}{(2+x)(2-x)(4+x^2)}\, dx$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{8}{(2+x)(2-x)(4+x^2)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{Cx+D}{4+x^2} \quad ②$$

Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems liefert:

$A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = 1$ ③

$$\Rightarrow \int_3^\infty \frac{8}{(4-x^2)(4+x^2)}\,dx \overset{1}{=} \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1/4}{2+x} + \frac{1/4}{2-x} + \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1/4}{2+x} - \frac{1/4}{x-2} + \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

$$\overset{2}{=} \lim_{b\to\infty} \left(\left[\frac{1}{4}\log(x+2) - \frac{1}{4}\log(x-2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_3^b \right)$$

$$\overset{1}{=} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{4}\log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{4}\log\left(\frac{b+2}{b-2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{4}\log(5) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log(5) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{2}\right) \quad 1$$

Aufgabe 6 (HM II), Aufgabe 8 (HM I+II)

DGL mit getrennten Variablen

Löse:

$$\int_{-e^{-1}}^{y(x)} \frac{1}{\eta}\, d\eta = \int_1^x \frac{e^t + \frac{1}{t}}{e^t + \log(t)}\, dt \qquad 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \log|y(x)| - \log|e^{-1}|$$

$$= \log(e^x + \log(x)) - \log(e^1 + \log(1))$$

$$\Leftrightarrow \quad \log|y(x)| = \log(e^x + \log(x)) - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad |y(x)| = (e^x + \log(x))\, e^{-2} > 0 \qquad 2$$

$y(1) = -e^{-1} < 0$

Damit y den Anfangswert erfüllt muss

$$y(x) = -(e^x + \log(x))e^{-2} \qquad 3$$

gewählt werden.