Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik II
SS 2000

---

1. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(10)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{für } |x| > 1 \text{ oder } x = 0 \\ 1 + \sqrt{x+1} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \end{cases} .$$

Man berechne — sofern möglich — die rechts- und linksseitigen Ableitungen und rechts- und linksseitigen Neigungen von f in $x = -1$, $x = 0$ mit Hilfe der Definition.

---

2. Aufgabe: Gegeben seien die Funktionen $F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

(9)

$$F_1(x) = \arcsin \sqrt{1 - e^{-6x}} , \quad F_2(x) = \arctan \sqrt{e^{6x} - 1} .$$

Man beweise:

(a) $F_1'(x) - F_2'(x)$ ist für $x > 0$ eine ganze Zahl (welche?).

(b) $F_1\left(\frac{1}{6} \log 4\right) = F_2\left(\frac{1}{6} \log 4\right)$.

(c) $F_1(x) = F_2(x)$ für $x > 0$.

---

3. Aufgabe: Man berechne

(5) **(a)** $$\int \frac{dx}{1 + \cosh x} \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad ,$$

(8) **(b)** $$\int_0^1 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx \quad .$$

---

4. Aufgabe: Mit Hilfe der Taylorschen Formel beweise man

(15)

$$-\frac{4}{3} x^3 \leq \log \frac{1 + e^{-2x}}{2} + x - \frac{x^2}{2} \leq 0 \qquad (x \geq 0) \quad .$$

---

5. Aufgabe: **(a)** Man beweise

(11)

$$\frac{d}{dx} \log \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und bestimme damit alle Lösungen $u(x) \geq 1$ der Differentialgleichung

$$(*) \qquad u' \sqrt{x^2+1} \log \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = u \log u \qquad (x > 0) \quad .$$

(b) Man bestimme alle Lösungen $u(x) \geq 1$ der Differentialgleichung $(*)$, für welche Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$ existieren, so daß

$$\left|u(x)\right| \leq c_1 x + c_2 \qquad (x > 0)$$

gilt.

---

6. Aufgabe: Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung

(12)

$$u' + u \cdot \left(\arctan (\log x)\right)' = \left(\arctan (\log x)\right)' \qquad (x > e) ,$$

welche $u(e) = 0$ erfüllt.

Man berechne $\alpha := \lim\limits_{x \to \infty} u(x)$ und entscheide, ob α größer oder kleiner als $\dfrac{\pi}{\pi + 4}$ ist.
