Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik I
WS 2003/2004

---

1. Aufgabe: Man beweise durch vollständige Induktion:
(15)

$$n^2 - \frac{3}{5} > \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{1 + 4j^2} \qquad (n = 2, 3, 4, ...) \ .$$

---

2. Aufgabe: Man beweise, daß die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
(16)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{für } x \leq 1 \\ \log\left(1 + \dfrac{x^3 - 1}{x}\right) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmt, daß gilt:

$$\left|x - 1\right| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \left|f(x) - f(1)\right| < \varepsilon \ .$$

---

3. Aufgabe: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(5) **(a)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \log\left(2 - \frac{1}{n}\right) \ ,$$

(8) **(b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)\ (n+2)} \ ,$$

---

4. Aufgabe: Gegeben seien die Geraden

$$g_1\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mu \in \mathbb{R} \ ,$$

sowie der Punkt $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(6) **(a)** Man zeige, daß g_1 und g_2 sich schneiden und eine Ebene E_0 aufspannen.

(6) **(b)** Man bestimme die Hessesche Normalform von E_0 und den Abstand des Punktes P von E_0.

---

b i t t e   w e n d e n !!

5. Aufgabe: Für $t \in \mathbb{R}$ wird das Gleichungssystem

(14)

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die

$$\text{Rang } A = \text{Rang } (A, b) = 3$$

ausfällt und gebe die entsprechenden Lösungen von $A\underline{x} = \underline{b}$ an.