Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik II
01.07.2006

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Alle stetigen Funktionen $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, die uneigentlich integrierbar sind, sind beschränkt.

(b) Jede auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe ist gleich ihrer Taylor–Reihe entwickelt um $x_0 = 0$.

(c) Jede zweimal differenzierbare Funktion $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, welche strikt konvex ist, erfüllt $h'' > 0$ auf (a,b).

(d) Jede Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, welche in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist, ist in x_0 auch stetig.

(e) Es gibt stückweise stetige Funktionen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktionen haben.

(f) Es gibt Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, mit Eigenwerten, deren algebraische Vielfachheit kleiner als deren geometrische Vielfachheit ist.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [6 Punkte]

(a) **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie die LR–Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) **(2 Punkte)**
Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ und den Rang $rg(A)$.

Aufgabe 3 [7 Punkte]

Es sei $f(x) = 1 + x^3 + x^7$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) **(4 Punkte)**
Man zeige: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(b) **(3 Punkte)**
Für welche $y \in \mathbb{R}$ existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} = f^{-1}(y)$?
Man berechne $f^{-1}(-1)$ und $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 [21 Punkte]

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) **(9 Punkte)** $$\int_2^5 \frac{7}{(x+1)^2\,(x-1)}\,dx$$

(b) **(6 Punkte)** $$\int x^5 \log(x^2+1)\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) **(6 Punkte)** $$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Aufgabe 5 [8 Punkte]

Beweisen Sie: Für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\frac{1}{4}\,x \le \tanh(x) \le x\,.$$

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Existiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$$

Musterlösung zur Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik II vom 01.07.2006

Aufgabe 1

a) f

b) w

c) f

d) w

e) w

f) f

Aufgabe 2

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1]{II-(-1)I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1]{III-(1)II} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 1

$$A = L \cdot R$$

b) Nach Gauß-Algorithmus aus (a) ist

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1 \quad 1$$

$$\operatorname{Rang}(A) = 3 \quad 1$$

Aufgabe 3

a) HöMa I $\Rightarrow$ $h(x) := x^n$ ist für $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Damit gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$:

$$f(x) - f(y) = \underbrace{x^3 - y^3}_{<0} + \underbrace{x^7 - y^7}_{<0} < 0$$ 4

b) f ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Die Umkehrfunktion existiert auf ganz $\mathbb{R}$. 1

Es gilt $f(-1) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -1$ 1

f ist stetig differenzierbar und $f'(-1) = 10 \neq 0$

Dann folgt mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{10}$$ 1

Aufgabe 4

a) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{7}{(x+1)^2\,(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{Ax^2 - A + Bx - B + Cx^2 + 2Cx + C}{(x+1)^2\,(x-1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (B+2C)x + (C-A-B)}{(x+1)^2\,(x-1)}$$

Koeffizientenvergleich: $A + C = 0$, $B + 2C = 0$, $C - A - B = 7$

$\rightsquigarrow C = \frac{7}{4}$, $B = -\frac{7}{2}$, $A = -\frac{7}{4}$ 3

$$\Rightarrow \int_2^5 \frac{7}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = -\frac{7}{4}\int_2^5 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{7}{2}\int_2^5 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{7}{4}\int_2^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$

2 2

$$= -\frac{7}{4}\left[\log(x+1)\right]_2^5 + \frac{7}{2}\left[(x+1)^{-1}\right]_2^5 + \frac{7}{4}\left[\log(x-1)\right]_2^5$$

$$= \ldots = \frac{7}{4}\left(\log(2) - \frac{1}{3}\right)$$

2

b)

$\int x^5 \log(x^2+1)\,dx$ Subst. $y = x^2$ 1

$= \int \frac{1}{2} y^2 \log(y+1)\,dy$ part. Integration 2

$= \frac{1}{6} y^3 \log(y+1) - \frac{1}{6} \int \frac{y^3}{1+y}\,dy$

$= \frac{1}{6} y^3 \log(y+1) - \frac{1}{6} \int y^2 - y + 1 - \frac{1}{1+y}\,dy$ Polynomdiv. 2

$= \frac{1}{6} y^3 \log(y+1) - \frac{1}{18} y^3 + \frac{1}{12} y^2 - \frac{1}{6} y + \frac{1}{6} \log(1+y)$

$\overset{y=x^2}{=} \frac{x^6}{6} \log(x^2+1) - \frac{x^6}{18} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(1+x^2)$ 1

c) $\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$ Subst. $y = 1+\sqrt{x}$ 4

$= \int_1^2 \sqrt{y}\; 2(y-1)\,dy$

$= 2 \int_1^2 y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{4}{15}(2+\sqrt{8})$ 2

Aufgabe 5

$f(x) := \tanh(x)$ ist auf $[0,1]$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar.

$(MWS) \Rightarrow$ Zu $x \in (0,1]$ existiert $\xi \in (0,x)$ mit 2

$$\tanh(x) - \tanh(0) = \tanh'(\xi)\, x$$

$$\Leftrightarrow \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(\xi)}\, x \qquad 3$$

$$\cosh(\xi) \geq 1 \Rightarrow \tanh(x) \leq x \qquad 1$$

$$0 < \xi < 1 \Rightarrow \cosh(\xi) \leq \cosh(1) \leq 2$$

$$\Rightarrow \tanh(x) \geq \frac{1}{4}\, x \qquad 1$$

Wegen $\tanh(0) = 0$ gilt die Ungleichung auch im Punkt $x = 0$. 1

Aufgabe 6

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3 - 1}}\, dx = \underbrace{\int_1^a \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}}\, dx}_{=: I} + \underbrace{\int_a^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}}\, dx}_{=: II}$$

für ein $a \in (1, \infty)$. 1

Wir betrachten I:

Es gilt $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \geq x - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}} \le \frac{\log(a)}{\sqrt{x-1}} \quad \text{für } x \in (1, a) \quad 1$$

Das uneigentliche Integral $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ existiert laut Vorlesung. 1

(Vergleichskriterium) $\Rightarrow$ I existiert

Wir betrachten II:

Es gilt
$$\left.\begin{aligned} \log(x) &\le \sqrt[4]{x} \\ \sqrt{x^3-1} &\ge \sqrt{\tfrac{1}{2}x^3} \end{aligned}\right\} \text{für } x \in (a, \infty), \text{ falls } a \text{ hinreichend groß gewählt wird.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}} \le \sqrt{2}\, x^{-5/4} \quad \text{für } x \in (a, \infty) \quad 2$$

Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty x^{-5/4}\, dx$ existiert laut Vorlesung. 1

(Vergleichskriterium) $\Rightarrow$ II existiert

I & II existieren $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$ existiert.