Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik II
21.07.2006

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Die Funktion cosh und ihre Taylor–Reihe, entwickelt um $x_0 = 0$, stimmen in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ überein.

(b) Jede unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleich ihrer Taylor–Reihe entwickelt um $x_0 = 0$.

(c) Die Punkte $(\cosh(t)\,,\, \sinh(t)) \in \mathbb{R}^2$ liegen für alle $t \in \mathbb{R}$ auf einer Ellipse.

(d) Die Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ ist auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

(e) Es gibt Matrizen A und B in $\mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, mit $\exp(A)\ \exp(B) \neq \exp(B)\ \exp(A)$.

(f) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ als Eigenwert hat, hat auch $\overline{\lambda}$ als Eigenwert.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Sei $b \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & b & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(3 Punkte)**
Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) **(6 Punkte)**
Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Sei

$$f(x) = \begin{cases} e \cdot x + (x-1)^2\,, & \text{für } x < 1 \\ e^x\,, & \text{für } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Man zeige, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Man berechne mit de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) .$$

Aufgabe 5 [19 Punkte]

(a) (5 Punkte)
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{e^{3x}\left(e^{4x} - 1\right)}{e^{2x} + 1}\, dx\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) (8 Punkte)
Man bestimme mit der Halbwinkelmethode:

$$\int \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2\sin(x) - 2}\, dx\,, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(c) (6 Punkte)
Existiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_0^2 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Aufgabe 6 [7 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= 2x^3\left(1 + u^2\right)\,, \quad x > 0 \\ u(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 1:

a) W b) F c) F d) W e) W f) W

Aufgabe 2

a) $\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda=-3 \lor \lambda=b \lor \lambda=2$ 3

b) • Für ~~b∈~~ $b\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$ ist A diagonalisierbar. 2

• Für $b=-3$ ist $E_{-3}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und A

somit diagonalisierbar. 2

• Für $b=2$ ist $E_2=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und A somit

nicht diagonalisierbar. 2

Aufgabe 3

• Es gilt

$$x>1: \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e^x - e^1}{x-1} \to e \text{ für } x \to 1$$

$$x<1: \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ex+(x-1)^2-e}{x-1} = e+(x-1) \to e \text{ für } x \to 1$$

und damit $f'(1) = e$. Es folgt 4

$$f'(x) = \begin{cases} e + 2(x-1) & , x<1 \\ e^x & , x \geq 1 \end{cases} \qquad 2$$

• f' ist stetig, denn $f'(x) \to e = f(1)$ für $x \to 1$. 2

Aufgabe 4:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\right) \qquad 1$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}\right) \qquad 1$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}\right) \qquad 2$$

$$=0 \qquad 1$$

Aufgabe 5

a) $\int \frac{e^{3x}(e^{4x}-1)}{e^{2x}+1}\,dx$ 4 $= \int e^{3x}(e^{2x}-1)\,dx = \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{3x}}{3} + C$ 1

$\left[t = \tan(\tfrac{x}{2}),\ dx = \frac{2}{1+t^2}\right]$

b) $\int \frac{\tan(\frac{x}{2})-1}{2\sin(x)-2}\,dx =$ 4 $\int \frac{2(t-1)}{4t-2t^2-2}\,dt$

$= -\int \frac{t-1}{(t-1)^2}\,dt$ 2

$= -\log(1-t) = -\log\left(1-\tan(\tfrac{x}{2})\right)$

2

c) Beh: $\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$ ist divergent.

Bew:

2

• Für $x \in (1,2)$ gilt: $\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} \geq \frac{2x+1}{(x-1)\cdot 4} \geq \frac{1}{4(x-1)}$

und $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)}\,dx$ divergiert. 4