

Aufgabe 1: (18 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cosh(x))^{\frac{1}{x^2}} \quad (6)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} \quad (6)$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 + x}{e^x - 1}} \quad (6)$$

Aufgabe 2: (18 Punkte)

(a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_e^{e^2} \frac{\log(\log(x))}{x \log(x)} dx . \quad (4)$$

(b) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx \quad (x \neq 1) . \quad (14)$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^x \log(\cos^2(t) + 1) dt .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel

$$|f(x) - x \log(2)| \leq \frac{1}{2} x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = e^{e^x + x - 2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

definierte Funktion eine Umkehrfunktion g besitzt. (5)

(b) Berechnen Sie die Zahlenwerte $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$. (7)

Aufgabe 5: (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $u(x) > 1$ der Differentialgleichung

$$(*) \quad u' \sqrt{x^2 + 1} = u \log(u) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (10)$$

(b) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (*), welche $u(0) = e^2$ erfüllt. (2)
