Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

HM 2 Bachelor- und Vordiplomsklausur (90 Min) SS 2008

---

1. Aufgabe *(8 Punkte)*

Seien A, B zwei 3×3-Matrizen für die $AB = BA$ gilt. Weiter seien λ_i $(i = 1, 2, 3)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, d.h. für die zugehörigen Eigenräume gilt $E_A(\lambda_i) = \operatorname{span}\{v_i\}$ für linear unabhängige Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor v_i von A auch Eigenvektor von B ist.

2. Aufgabe *(9 Punkte)*

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für $x > 0$

$$\sqrt{\sinh^2(x) + \cosh^2(x)} - 1 < 2\,x\,\sinh(x)$$

gilt.

3. Aufgabe *(9 Punkte)*

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 2x \log(1 + x^4)\,\mathrm{d}x\ .$$

4. Aufgabe *(11 Punkte)*

Berechnen Sie mit der Halbwinkelmethode das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{8 + 3\sin(x) - \cos(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

5. Aufgabe *(7 Punkte)*

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$u'' - 2u' + 2u = x^2 + 4x + 5\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

duch Ansatz vom Typ der rechten Seite.

6. Aufgabe *(10 Punkte)*

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung ohne Angabe des Definitionsbereichs der Lösung.

$$3y' - y\sin(x) + 3y^4\sin(x) = 0\ .$$

Aufgabe 1

Nach Vor. gilt

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$\Rightarrow \quad B A v_i = B \lambda_i v_i$ (1)

$\Rightarrow \quad A(B v_i) = \lambda_i (B v_i)$, da $AB = BA$ (1)

$\Rightarrow \quad (B v_i)$ ist Eigenvektor von A zu λ_i (3)

$\Rightarrow \quad (B v_i) \in \operatorname{Span}\{v_i\}$ nach Vor.

$\Rightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R}$ so daß $B v_i = \mu v_i$

$\Rightarrow \quad v_i$ ist Eigenvektor von B. (3)

Aufgabe 2

Sei $x > 0$. Die Funktion $f(t) := \sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t)}$ ist auf $[0,x]$ stetig und auf $(0,x)$ differenzierbar. 1

(Mittelwertsatz) $\Rightarrow$ $\exists\ \xi \in (0,x)$ so daß

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)\ (x-0)$$

gilt.

$$\Rightarrow \sqrt{\sinh^2(x) + \cosh^2(x)} - 1 \overset{2}{=} \frac{2\sinh(\xi)\cosh(\xi)}{\sqrt{\underbrace{\sinh^2(\xi)}_{\geq 0} + \cosh^2(\xi)}}\, x \quad 2$$

$$\leq \frac{2\sinh(\xi)\cosh(\xi)}{\cosh(\xi)}\, x \quad 2$$

$$= 2\sinh(\xi)\, x$$

$$< 2\sinh(x)\, x$$

1

da $x > \xi$ und $\sinh$ streng monoton wachsend ist. 1

3. Aufgabe

$$\int_0^1 2x \cdot \log(1+x^4)\,dx = \left[x^2 \cdot \log(1+x^4)\right]_0^1 - \int_0^1 x^2 \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx$$ 3

$$= \log(2) - 2 \cdot \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}\,dy \qquad \left[y = x^2,\ dy = 2x\,dx\right]$$

$$= \log(2) - 2 \cdot \int_0^1 1 - \frac{1}{1+y^2}\,dy$$ 3

$$= \log(2) - 2 + \left[2\arctan(y)\right]_0^1$$

$$= \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$ 3

4. Aufgabe

$$\int \frac{1}{8+3\sin(x)-\cos(x)}\,dx$$

$$\left[\; y=\tan\left(\tfrac{x}{2}\right) \qquad dx=\frac{2}{1+y^2}\,dy \qquad \sin(x)=\frac{2y}{1+y^2} \qquad \cos(x)=\frac{1-y^2}{1+y^2} \;\right] \quad 3$$

$$= \int \frac{1}{8+\frac{6y}{1+y^2}-\frac{1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int \frac{2}{9y^2+6y+7}\,dy \quad 2$$

$$= 2\cdot\int \frac{1}{(1+3y)^2+6}\,dy \quad 3 \qquad \left[\; z=\frac{1+3y}{\sqrt{6}}\;,\quad dy=\frac{\sqrt{6}}{3}\,dz \;\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9}\cdot\arctan(z)+C\;,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{6}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C\;,\quad C\in\mathbb{R} \quad 3$$

Aufgabe 5

$$u'' - 2u' + 2u = x^2 + 4x + 5 \,, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Bestimme zunächst die Lösungsgesamtheit der homogenen DGL. Löse dazu die charakteristische Gleichung 1

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i \quad 1$$

$\Rightarrow$ komplexes Fundamentalsystem: $u_1(x) = e^{(1+i)x}$, $u_2(x) = e^{(1-i)x}$;

reelles Fundamentalsystem: $\tilde{u}_1(x) = e^x \cos(x)$, $\tilde{u}_2(x) = e^x \sin(x)$ 1

Bestimme eine partikuläre Lösung u_p durch den Ansatz

$$u_p(x) = ax^2 + bx + c \quad 1$$

$\Rightarrow u_p'(x) = 2ax + b$

$\Rightarrow u_p''(x) = 2a$, setze dies in $(*)$ ein:

$$2a - 4ax - 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax^2 + (2b-4a)x + 2(a-b+c) = x^2 + 4x + 5 \quad 1$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left.\begin{array}{lll} 2a = 1 & \Rightarrow & a = \frac{1}{2} \\ 2b - 4a = 4 & \Rightarrow & b = 3 \\ 2(a-b+c) = 5 & \Rightarrow & c = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow u_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5 \quad 1$$

Damit ist die Lösungsgesamtheit gegeben durch

1

$$u(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x) + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

6. Aufgabe

$$(*) \quad 3y' - y\sin(x) + 3y^4\sin(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y' - \frac{y}{3}\sin(x) + y^4\sin(x) = 0$$

Bernoulli-DGL: $\alpha = 4$ 1

Transformation: $z = y^{1-4} = y^{-3} \quad (y \neq 0)$ 1

$(*)$ wird dann zu: $z' + \sin(x) z = 3\sin(x)$ (lin. DGL erster Ord.) 1

Lösung ist gegeben durch

$$z(x) = e^{-\int \sin(x)dx}\left(\int 3\sin(x)\, e^{\int \sin(x)dx}\, dx\right) \quad 1$$

$$= e^{\cos(x)}\left(3e^{-\cos(x)} + c\right), \quad c \in \mathbb{R} \quad 5$$

$$= 3 + c \cdot e^{\cos(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Es folgt:

$$y(x) = \frac{1}{(3 + c\cdot e^{\cos(x)})^{1/3}}, \quad c \in \mathbb{R} \quad 1$$