Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik II (Bachelor / Vordiplom)
SS 2008, Wiederholung
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(9 Punkte)*

Betrachten Sie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasen $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{L}_1 = (e_1, e_1 + e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{L}_2 = (-e_1, e_1 - e_2, e_1 - e_2 - e_3)$ von $\mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe *(8 Punkte)*

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq C\, |x - y|^{1+\alpha} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

für Konstanten $C > 0$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

3. Aufgabe *(9 Punkte)*

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{x + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x^2}\, \mathrm{d}x\,, \quad \text{für } x \in (-1, 5)\,.$$

4. Aufgabe *(7 Punkte)*

Durch

$$g(x) := \int\limits_0^{x^2+7x^5+1} \frac{\log\left(1 + \frac{t-1}{t+2}\right)}{1+t}\, \mathrm{d}t\,, \quad D(g) := (0, \infty)$$

sei eine differenzierbare Funktion gegeben. Berechnen Sie die erste Ableitung g'.

5. Aufgabe *(11 Punkte)*

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$2u' + \frac{10}{x}\, u = \frac{2}{x^7 + x^5}\,, \quad u(1) = \frac{\pi}{2}\,, \quad x \in (1, \infty)\,.$$

6. Aufgabe *(10 Punkte)*

Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz

$$\int\limits_3^\infty \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) \frac{1}{\sqrt{x-3}}\, \mathrm{d}x\,.$$

1. Aufgabe

Bestimme die Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung L:

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$L(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stelle nun $L(e_1)$ und $L(e_1+e_2)$ bzgl. der Basis Z_2 dar:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{31} = 2, \quad a_{21} = -3, \quad a_{11} = -3$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{32} = 2, \quad a_{22} = -4, \quad a_{12} = -3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

2. Aufgabe

Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C\, |x-y|^{1+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq C\, |x-y|^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f' = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

(Satz $\underline{V}$.3.3) $\Rightarrow$ f ist konstant

8

Aufgabe 3

$$\int \sqrt{x + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x^2}\, dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^2}\, dx \quad 4$$

$$= \frac{9}{2} \int \sqrt{1-y^2}\, dy \qquad \left(\text{Subst. } y = \frac{x-2}{3}\right) \quad 1$$

$$= -\frac{9}{2} \int \sin^2 z\, dz \qquad \left(\text{Subst. } y = \cos z\right) \quad 1$$

$$= -\frac{9}{2}\,\frac{1}{2}\left(z - \cos z \sin z\right) \quad 2$$

$$= -\frac{9}{4}\left(\arccos\left(\frac{x-2}{3}\right) - \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{1 - \frac{1}{9}(x-2)^2}\right) + C$$

1

4. Aufgabe

$$g'(x) = \frac{\log\left(1+\frac{x^2+7x^5}{x^2+7x^5+3}\right)}{x^2+7x^5+2} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^2+7x^5+1\right]$$ 5

$$= \frac{\log\left(1+\frac{x^2+7x^5}{x^2+7x^5+3}\right)}{x^2+7x^5+2}\left(2x+35x^4\right)$$ 2

Aufgabe 5

$$2u' + \frac{10}{x} u = \frac{2}{x^7 + x^5} \quad \Leftrightarrow \quad u' + \frac{5}{x} u = \frac{1}{x^7 + x^5}$$

$$u(1) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x \in (1, \infty)$$

Dies ist eine lineare inhomogene Dgl. der Form 1

$$\begin{cases} u' + a(x) u = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad \text{mit } a(x) = \frac{5}{x}, \ f(x) = \frac{1}{x^7 + x^5}, \quad x_0 = 1, \ u_0 = \frac{\pi}{2}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi} \left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\eta)\,d\eta}\, d\xi + u_0 \right)$$ 1

Berechne zunächst $\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi$:

$$\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi = \int_{1}^{x} \frac{5}{\xi}\,d\xi = 5\log(x) - 5\log(1) = 5\log(x) = \log(x^5)$$ 3

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\eta)\,d\eta}\, d\xi = \int_{1}^{x} \frac{1}{\xi^7 + \xi^5}\, e^{\log(\xi^5)}\, d\xi = \int_{1}^{x} \frac{1}{\xi^2 + 1}\, d\xi$$

$$= \arctan(x) - \arctan(1)$$ 4

$$= \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$$

Damit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = e^{-\log(x^5)} \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right)$$ 2

$$= \frac{\arctan(x) + \frac{\pi}{4}}{x^5}$$

Aufgabe 6

$$\int_3^\infty \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$$

Teile das Integral auf und untersuche die beide Integrale 2

$$\int_3^4 \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx \quad \text{und} \quad \int_4^\infty \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx \quad \text{auf Konvergenz:}$$

- $\int_3^4 \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$:

2

Da $\left|\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\right| \leq 1$ für alle $x > 3$ gilt, ist

$$\left|\int_3^4 \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx\right| \leq \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy < \infty, \quad 2$$

da $\frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}} = y^{-\alpha}$ mit $\alpha < 1$

- $\int_4^\infty \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$:

2

Da $\sin(y) \leq y$ für alle $y \geq 0$ gilt, ist $\left|\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{x-3}\right|$ für alle $x > 3$

und damit

$$\left|\int_4^\infty \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx\right| \leq \int_4^\infty \frac{1}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\,dx$$

2

$$= \int_1^\infty \frac{1}{y^{3/2}}\,dx < \infty \quad , \text{da } \frac{1}{y^{3/2}} = y^{3/2} = y^{-\alpha} \text{ mit } \alpha > 1$$