Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik II (Bachelor / Vordiplom)
WS 2008/2009
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(10 Punkte)*

Betrachten Sie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Matrix A der linearen Abbildung bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ an. Bestimmen Sie anschließend alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 der Matrix A. Geben Sie die Transformationsmatrix B an, so dass gilt: $B^{-1} \cdot A \cdot B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2. Aufgabe *(9 Punkte)*

Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\int_{-\pi}^{\infty} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{(x+\pi)^{\frac{1}{3}}}\, dx\,.$$

3. Aufgabe *(9 Punkte)*

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{5 + 4y + y^2}\, \mathrm{d}y \quad \text{für } y \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe *(9 Punkte)*

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 6x + 10}\, \mathrm{d}x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

5. Aufgabe *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(x) + 4u(x) = \sin(x) + e^{-5x}, \quad u(0) = 0, \quad x > 0\,.$$

— Bitte wenden! —

6. Aufgabe *(7 Punkte)*

Sei $a < x_0 < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$$

und $f'(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend auf (a,b) ist.

Aufgabe 1

Es gilt $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 1 \\ -3 & -2-t & 3 \\ -2 & -2 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$= (-t)(-2-t)(3-t) + 6 + 6 + 2(-2-t) + 6(-t) - (3-t)(-1)(-3)$$

$$= -t^3 + t^2 + t - 1 = (-1)(t-1)^2(t+1)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

3

Bestimme nun die Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3. Dazu bestimme Kern$(A - \mathbb{1})$ und Kern$(A + \mathbb{1})$:

$$(A - \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen dieser Matrix sind linear abhängig.

$\Rightarrow \dim(\text{Kern}(A - \mathbb{1})) = 2$

$\forall x \in \text{Kern}(A - \mathbb{1})$ gilt: $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Wähle z.B. $v_1 = (1, 0, 1)$ und $v_2 = (0, 1, 1)$.

2

v_1, v_2 sind linear unabhängig und es gilt $v_1, v_2 \in \text{kern}(A - \mathbb{1})$.

$$A + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}+\text{I}]{\text{III}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ 2 Zeilen von $(A+\mathbb{1})$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow \dim \operatorname{Kern}(A+\mathbb{1}) = 1$

Wähle z.B. $v_3 = (1, 3, 2)$ 1

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 2

Aufgabe 2

Teile das Integral auf:

$$\int_{-\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx$$

2

Nun ist

$$\left|\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx\right| \le \int_{-\pi}^{0} \frac{2}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx \overset{y=x+\pi}{=} \int_{0}^{\pi} \frac{2}{y^{1/3}}\,dy < \infty, \text{ da } \frac{1}{3} < 1$$

3

und

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(y-\pi)+\cos(y-\pi)}{y^{1/3}}\,dy$$

Der Zähler $f(x) = \sin(y-\pi)+\cos(y-\pi)$ ist stetig auf $[\pi,\infty)$, und seine Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\cos(x-\pi)+\sin(x-\pi)-1$ ist beschränkt für alle $x \in [\pi,\infty)$. Da $\frac{1}{3} > 0$, folgt dann auch

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{(x+\pi)^{1/3}}\,dx < \infty$$

4

Insgesamt haben wir damit die Konvergenz des Integrals gezeigt.

3. Aufgabe

$$\int \sqrt{5+4y+y^2}\,dy = \int \sqrt{(y+2)^2+1}\,dy \quad 3 \quad ; \quad \left[\sinh(t) = (y+2)\,,\ dy = \cosh(t)\,dt\right]$$

$$= \int \sqrt{\sinh^2(t)+1}\cdot\cosh(t)\,dt$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2(t)}\cdot\cosh(t)\,dt$$

$$= \int \cosh^2(t)\,dt \quad 3$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(e^{t}+e^{-t}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{2t}+e^{-2t}+2\;dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+2t\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{1}{2}t+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$$

3

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\sinh(2\cdot\operatorname{arsinh}(y+2))+\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(y+2)+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}}}$$

4. Aufgabe

$$\int \frac{x+2}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-2}{x^2+6x+10}\,dx$$

4

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx - \int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx$$

5

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\log\left(x^2+6x+10\right) - \arctan(x+3) + C \quad , C \in \mathbb{R}}}$$

A5)

Die eindeutig bestimmte Lösung des AWP's ist gegeben durch: (DGL linear 1ter Ordnung, inhomogen)

$$u(x) = e^{-\int_0^x 4\,dt}\left(\int_0^x e^{\int_0^t 4\,ds}\left(\sin(t)+e^{-5t}\right)dt + 0\right) \quad ②$$

$$= e^{-4x}\left(\int_0^x e^{4t}\sin(t) + e^{-t}\,dt\right)$$

$$= \underline{-e^{-5x} + e^{-4x}} + e^{-4x}\underbrace{\int_0^x e^{4t}\sin(t)\,dt}_{I} \quad ②$$

$$I \overset{P.I}{=} -\cos(t)\,e^{4t}\Big|_0^x + \int_0^x \cos(t)\,4e^{4t}$$

$$= 1-\cos(x)e^{4x} + 4\sin(t)e^{4t}\Big|_0^x - 16\underbrace{\int_0^x e^{4t}\sin(t)\,dt}_{I}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{4t}\sin(t)\,dt = \frac{1-\cos(x)e^{4x}+4\sin(x)e^{4x}}{17} \quad ⑤$$

$$\Rightarrow u(x) = -e^{-5x} + \frac{18}{17}e^{-4x} - \frac{\cos(x)}{17} + \frac{4}{17}\sin(x) \quad ①$$

Aufgabe 6

Seien $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$.

Falls $x, y \in (a, x_0)$ oder $x, y \in (x_0, b)$ folgt sofort

$$f(x) < f(y),$$

2

da $f' > 0$ auf (a, x_0) bzw. (x_0, b) gilt.

Falls $a < x \leq x_0 \leq y < b$:

$$f(x) - f(y) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(y).$$

Die Funktion f ist auf $[x, x_0]$ bzw. $[x_0, y]$ stetig und in (x, x_0) bzw. (x_0, y) differenzierbar.

(Mittelwertsatz) $\Rightarrow$ $\exists$ $\xi \in (x, x_0)$ und $\eta \in (x_0, y)$ so dass

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

$$f(x_0) - f(y) = f'(\eta)(x_0 - y)$$

3

gilt.

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x - x_0)}_{\leq 0} + \underbrace{f'(\eta)}_{>0} \underbrace{(x_0 - y)}_{\leq 0}$$

Da aber nicht gleichzeitig $x - x_0 = 0$ und $x_0 - y = 0$ gelten kann folgt: $f(x) - f(y) < 0$.

2