Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/∼maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)2 41-80 94925
Fax: ++49(0)2 41-80 92323
Sekr.: ++49(0)2 41-80 94922
80 94921

Adresse: Templergraben 55
1. Etage , Raum 106
D –52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik II (Bachelor / Vordiplom) SS 2010
30.09.2010 (Wiederholung)
Musterlösung

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung
Bestimme zunächst die Eigenwerte von A.
Berechne dazu das charakteristische Polynom von A und dessen Nullstellen.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 4 & -7-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -8-\lambda \end{pmatrix} && (1) \\ &= -\lambda(7+\lambda)(8+\lambda) + 8(8+\lambda) && (1) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 16\lambda - 64) && (1) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+8)^2 && (1) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = -8$ (algebraische Vielfachheit 2).

Bestimme die Eigenvektoren von A.
<u>$\lambda_1 = 1$:</u>

Löse $(A - \lambda_1 I)v = 0$: (1)

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\Rightarrow\ -v_1 + 2v_2 - 4v_3 = 0 \ \wedge\ -18v_3 = 0.$
Setze $v_2 = t \ \Rightarrow\ v_1 = 2t$.

$$\Rightarrow\ \text{Kern}(A - \lambda_1 I) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ (geometrische Vielfachheit 1).} \qquad (1)$$

<u>$\lambda_2 = -8$:</u>

Löse $(A - \lambda_2 I)v = 0$: (1)

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\Rightarrow\ -4v_1 + v_2 - 2v_3 = 0.$
Setze $v_1 = t$ und $v_2 = s \ \Rightarrow\ v_3 = 2t + s/2$.

$$\Rightarrow\ \text{Kern}(A - \lambda_2 I) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ (geometrische Vielfachheit 2).} \qquad (2)$$

Für jeden Eigenwert von A gilt $n_{\text{alg}}(\lambda) = n_{\text{geo}}(\lambda)$. $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$$\text{Mit } B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ gilt dann } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Ungleichung

$$\frac{\tan(x)}{x-\frac{\pi}{4}} > 3 \quad \text{für alle } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Lösung
Für $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist $x - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
$\Rightarrow$ Aussage äquivalent zu: $\tan(x) > 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ für alle $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. (1)
Mit $f(x) = \tan(x)$ gilt: (1)

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{stetig} & \text{auf } \left[\frac{\pi}{4}, x\right] \\ f & \text{differenzierbar} & \text{auf } \left(\frac{\pi}{4}, x\right) \end{array}\right\} \text{für alle } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

mit $f'(\xi) = 1 + \tan^2(\xi)$. (1)

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt nun die Existenz eines $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, x\right)$, so dass (1)

$\tan(x) - \tan(\pi/4) = (1 + \tan^2(\xi))(x - \pi/4)$. (2)

Wegen $\tan(\pi/4) = 1$ folgt
$\tan(x) = (1 + \tan^2(\xi))(x - \pi/4) + 1$. (1)

Mit $\xi > \pi/4$ ist $\tan(\xi) > 1$, also auch $\tan^2(\xi) > 1$. Demzufolge ist
$\tan(x) > 2(x - \pi/4) + 1$. (1)

Mit $x - \pi/4 < \pi/4 < 1$ ist nun
$\tan(x) > 2(x - \pi/4) + (x - \pi/4) = 3(x - \pi/4)$. (1)

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral $I = \int x\sqrt{x^4+1}\,dx$.

Lösung
Mit der Substitution $z = x^2$, $\frac{dz}{dx} = 2x$ gilt (2)
$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{z^2+1}\,dz$. (1)
Mit der Substitution $z = \sinh(\xi)$ gilt (1)
$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{\sinh^2(\xi)+1}\cosh(\xi)\,d\xi$. (1)
Wegen $\sinh^2(\xi) + 1 = \cosh^2(\xi)$ ist nun
$I = \frac{1}{2}\int \cosh^2(\xi)\,d\xi$ (1)
$= \frac{1}{4}(\sinh(\xi)\ \cosh(\xi) + \xi)$ (1)
$+c$ (1)
$= \frac{1}{4}\left(z\sqrt{z^2+1} + \operatorname{arsinh}(z)\right) + c = \frac{1}{4}\left(x^2\sqrt{x^4+1} + \operatorname{arsinh}(x^2)\right) + c.$ (2)

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Geben Sie einen Beweis zu der Aussage 6.7.8.iii der Vorlesung an.
Zur Erinnerung: Diese Aussage lautet

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Lösungsvariante 1: „Mittelwertsatz der Differentialrechnung"
Ansatz: Berechnung der Ableitungen und Vergleich der Funktionen an einem Punkt. (2)

Laut Skript (6.7.9.iii) ist $\frac{d}{dx}\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$ für alle $x \in (-1,1)$. (2)

Weiterhin gilt $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{(1-x)-(-(1+x))}{(1-x)^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$ für alle $x \in (-1,1)$. (3)

Außerdem ist $\operatorname{artanh}(0) = 0 = \frac{1}{2}\log\frac{1+0}{1-0}$. (2)

Folgerung 5.3.5 liefert jetzt die Behauptung. (1)

Lösungsvariante 2: „Substitution"

$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Setze $y = \operatorname{artanh}(x),\ y \in (-\infty,+\infty)$.

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tanh(y)}{1-\tanh(y)}\right)$. (3)

Setze die Definition des $\tanh$ ein.

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1-\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}\right)$ (3)

$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^y+e^{-y}+e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}-e^y+e^{-y}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2e^y}{2e^{-y}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(e^{2y}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2y = y.$ (4)

Lösungsvariante 3: „Anwenden der Funktion tanh"

$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$\Leftrightarrow x = \tanh(\operatorname{artanh}(x)) = \tanh\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$. (3)

Setze die Definition des $\tanh$ ein.

$\Leftrightarrow x = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)}{\exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) + \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)}$. (3)

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. (2)

$\Leftrightarrow x \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Multiplikation mit $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ liefert die Äquivalenz des letzten Terms mit

$x \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} + 1\right) = \frac{1+x}{1-x} - 1$.

Multiplikation mit $(1-x)$ liefert die Äquivalenz des letzten Terms mit

$x \cdot (1+x+1-x) = 1+x-(1-x)$.

$\Leftrightarrow x \cdot 2 = 2x$. (2)

Bemerkung zu den Lösungsvarianten 2 und 3:
Für ähnliche Lösungswege gilt: Auf die korrekte Anwendung der Funktion tanh auf die gesamte Gleichung bzw. die richtige Verwendung einer Substitution, die eine der Funktionen tanh oder artanh beinhaltet, entfallen 3 Punkte. Für die Verwendung der definierenden Gleichung des tanh sind weitere 3 Punkte veranschlagt. Die restlichen 4 Punkte werden vergeben für die Rückführung auf eine *offensichtlich* wahre Aussage.

Aufgabe 5 (12 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem für $u = u(x)$

$$4u''(x) - 8u'(x) + 3u(x) = \sin(x), \quad \text{für } x > 0,$$
$$u(0) = \frac{10}{65},\ u'(0) = 0.$$

Lösung

1. Homogene Lösung: (2)

Berechne die charakteristische Gleichung:

$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 - 1/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1/2 \wedge \lambda_2 = 3/2.$ (2)

$\Rightarrow L_{\text{hom}} = \{u_{\text{h}}(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x/2} \ : \ c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\}$ (1)

2. Spezielle Lösung: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Für $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ beginne mit dem Ansatz

$u_{\text{s}}(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)$

und setze dies in die Differentialgleichung ein.

$\Rightarrow 4u_{\text{s}}''(x) - 8u_{\text{s}}'(x) + 3u_{\text{s}}(x) = \sin(x)$ (2)

$\Leftrightarrow 4(-a_1 \sin(x) - a_2 \cos(x)) - 8(a_1 \cos(x) - a_2 \sin(x)) + 3(a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)) = \sin(x)$

$\Leftrightarrow (-a_1 + 8a_2) \sin(x) + (-a_2 - 8a_1) \cos(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 + 8a_2 &= 1 \\ \wedge\ -a_2 - 8a_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 &= -8a_1 \\ \wedge\ a_1 &= -1/65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 &= -1/65 \\ \wedge\ a_2 &= 8/65 \end{cases}$ (2)

$\Rightarrow u_{\text{s}}(x) = -1/65 \cdot \sin(x) + 8/65 \cdot \cos(x)$

$L_{\text{ihn}} = \{u(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x/2} - 1/65 \cdot \sin(x) + 8/65 \cdot \cos(x) \ : \ c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\}$ (1)

3. Anfangswertproblem

Löse das AWP. Berechne dazu die Konstanten aus den gegebenen Anfangswerten.

$\begin{cases} u\,(0) &= c_1 + c_2 + 8/65 = 10/65 \\ \wedge\ u'(0) &= 1/2 \cdot c_1 + 3/2 \cdot c_2 - 1/65 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2/65 - c_2 \\ \wedge\ 1/65 - c_2/2 + 3c_2/2 - 1/65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 &= 0 \\ \wedge\ c_1 &= 2/65 \end{cases}$ (2)

$\Rightarrow u(x) = 2/65 \cdot e^{x/2} - 1/65 \cdot \sin(x) + 8/65 \cdot \cos(x)$ ist die eindeutige Lösung des AWPs.