RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc. 1. August 2015
SoSe 15 **Klausur: Höhere Mathematik II** Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Mit der Definition

$$L(\vec{v}) := M \cdot \vec{v} \qquad \text{für} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^4$$

induziert M eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.
(a) Bestimmen Sie den Rang von M sowie die Dimensionen von $im(L)$ und $ker(L)$.
(b) Geben Sie Basen für $im(L)$ und $ker(L)$ an.

Lösung
(a) Um Rang und Dimensionen angeben zu können, führen wir den Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-(1/2)I} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 & 4 \\ 0 & -3/2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-4II} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 & 4 \\ 0 & -3/2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: N$$

Hier liest man $rg(M) = 2$ ab.
Außerdem gilt: $\dim(im(L)) = rg(M) = 2$.
Mit dem Dimensionssatz folgt $\dim(ker(L)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(im(L)) = 2$.

(b) Eine Basis für $im(L)$ lesen wir ab; es sind zwei linear unabhängige Spalten der Matrix M:

$$im(L) = span\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um eine Basis von $ker(L)$ zu erhalten, führen wir einen weiteren Gauß-Schritt durch:

$$N \xrightarrow[II\cdot 2/3]{I+(8/3)II} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{N}.$$

Nun lesen wir ab:

$$ker(L) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternative zur Bestimmung einer Basis des Kerns von L:

$$\tilde{N} \xrightarrow[\tilde{II}:=(-1/2)I]{\tilde{I}:=(-1)II} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{I}+2\tilde{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen:

$$ker(L) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2

Vorgelegt sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \log(x),\ x > 0$.

(a) Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom $T_3(x;1,f)$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie eine Umgebung U von $x_0 = 1$, so dass die Abschätzung

$$\big|\log(x) - T_3(x;1,f)\big| < 10^{-4}$$

für alle $x \in U$ erfüllt ist.

Lösung

(a) Die Taylor-Formel liefert:

$$T_3(x;1,f) = \sum_{k=0}^{3} \log^{(k)}(1) \cdot \frac{(x-1)^k}{k!},$$

wobei $\log^{(0)} := \log$.
Weiter gelten

- $\log(1) = 0$

und für $x > 0$

- $\log^{(1)}(x) = 1/x$,
- $\log^{(2)}(x) = -1/x^2$ und
- $\log^{(3)}(x) = 2/x^3$.

Einsetzen liefert:

$$T_3(x;1,f) = (x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}.$$

(b) Nach Restglied-Formel gilt

$$\big|\log(x) - T_3(x;1,f)\big| = \Big|6 \cdot \frac{1}{\xi^4} \cdot \frac{(x-1)^4}{4!}\Big| = \frac{1}{4\cdot\xi^4} \cdot |x-1|^4$$

für ein ξ zwischen 1 und x.
Wähle $U = (9/10, 11/10)$.
Dann gilt einerseits: $\frac{1}{4\cdot\xi^4} \le \frac{1}{4\cdot 0{,}9^4} = \frac{1}{4\cdot 0{,}81^2} \le \frac{1}{4\cdot 0{,}8^2} = \frac{1}{4\cdot 0{,}64} = \frac{1}{2{,}56} < 1.$
Andererseits ist $|x-1|^4 < 10^{-4}$ für $x \in U$.
Damit ist die Abschätzung bewiesen.

Aufgabe 3

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 \cdot \sqrt{9-t^2}}\,\mathrm{d}t,\ 0 < |t| < 3.$

Lösung

Wir berechnen

$$\int \frac{1}{t^2 \cdot \sqrt{9-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 \cdot \sqrt{1-(t/3)^2}}\,\mathrm{d}t =: (*).$$

Mit der Substitution $t/3 = \sin(x),\ \mathrm{d}t = 3\cos(x)\,\mathrm{d}x$
erhalten wir, wegen $\sqrt{1-(t/3)^2} = \cos(x)$,

$$(*) = \frac{1}{\cancel{3}}\int \frac{1}{9\sin^2(x)\cdot\cancel{\cos(x)}}\cdot\cancel{3}\cancel{\cos(x)}\,\mathrm{d}x_{|x=\arcsin(t/3)} = \frac{1}{9}\int\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x_{|x=\arcsin(t/3)}.$$

Eine Stammfunktion von $\sin^{-2}$ ist laut Skript $(-\cot)$.

Nachrechnen: $[-\cot(x)]' = [-\cos(x)/\sin(x)]' = -(-\sin^2(x) - \cos^2(x))/\sin^2(x) = \sin^{-2}(x)$.

Also gilt für $0 < |t| < 3$: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2\cdot\sqrt{9-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{9}\cot(\arcsin(t/3)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Bemerkung: Der letzte Ausdruck lässt sich vereinfachen zu

$$-\frac{\sqrt{9-t^2}}{9t} + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert; begründen Sie die Entscheidung.

Lösung
Falls Konvergenz vorliegt, so gilt für jedes feste $c \in (2,\infty)$:

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^c \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x.$$

Wir betrachten die beiden Summanden auf der rechten Seite getrennt und stellen fest:

- $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4) \geq (x-2)(2^2+2\cdot 2+4) = 12(x-2)$.
- Deshalb: $\frac{1}{\sqrt{x^3-8}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Damit:

$$\begin{aligned}\int\limits_2^c \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{\sqrt{12}}\int\limits_2^c \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{y=x-2}{\underset{\mathrm{d}y=\mathrm{d}x}{=\!=}} \frac{1}{\sqrt{12}}\int\limits_0^{c-2} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert laut Vorlesung.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_c^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x &\leq \int\limits_c^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x^3/2}}\,\mathrm{d}x,\ \text{da für } c \text{ hinreichend groß gilt: } 8 < x^3/2\ \forall\ x > c, \\ &= \sqrt{2}\int\limits_c^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert laut Vorlesung, liefert also wieder eine konvergente Majorante.

Alternativlösung zum Integral $\int\limits_2^c \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int\limits_2^c \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^c \frac{1}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^c \frac{3/2\cdot x^2}{\sqrt{x^3-8}}\,\mathrm{d}x,\ \text{da } x > 2 \Rightarrow 3/2\cdot x^2 \geq 1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{x^3-8}\,\Big|_{x=2+\varepsilon}^{c} = \sqrt{c^3-8}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{C},\ j = 1,2$, und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_j \in \mathbb{C}^2,\ j = 1,2$, der Matrix A.

(b) Geben Sie für das homogene Differentialgleichungssystem $u' = A \cdot u$ ein Fundamentalsystem (d.h. eine Lösungsbasis) von <u>komplexwertigen</u> Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2,\ t \mapsto u(t)$, an.

(c) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des in Aufgabenteil **(b)** berechneten komplexwertigen Fundamentalsystems ein <u>reellwertiges</u> Fundamentalsystem von Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto v(t)$, von $v' = A \cdot v$.

(d) Skizzieren Sie das qualitative Verhalten der reellwertigen Lösungen von $v' = A \cdot v$ in einem Phasenportrait in der (v_1, v_2)-Ebene.

Lösung

(a) $\det(A - \lambda \cdot I) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$

$A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. Man liest den Eigenvektor ab: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

$A - \lambda_2 \cdot I = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$. Man liest den Eigenvektor ab: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

(b) Ein komplexwertiges Fundamentalsystem ist nach Satz 7.2.10 bzw. Definition 7.2.11 gegeben durch

$$u_1(t) = \exp((1+i)t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2(t) = \exp((1-i)t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

(c) Ein reellwertiges Fundamentalsystem erhält man, indem man eine der beiden Funktionen u_1 und u_2 in Real- und Imaginärteil aufspaltet. Wir wählen u_1:

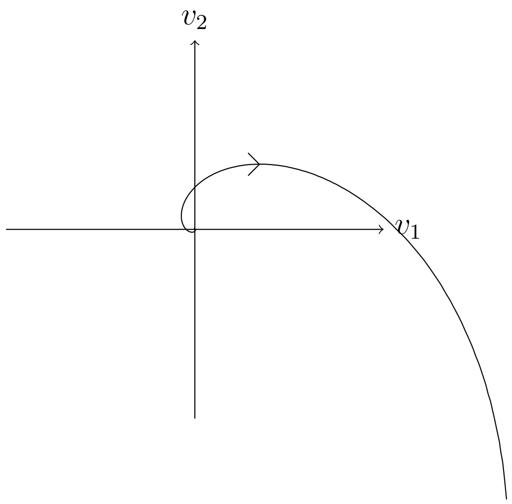
$$u_1(t) = \exp((1+i)t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \cdot [\cos(t) + i \cdot \sin(t)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ -sin(t) + i \cdot \cos(t) \end{pmatrix}.$$

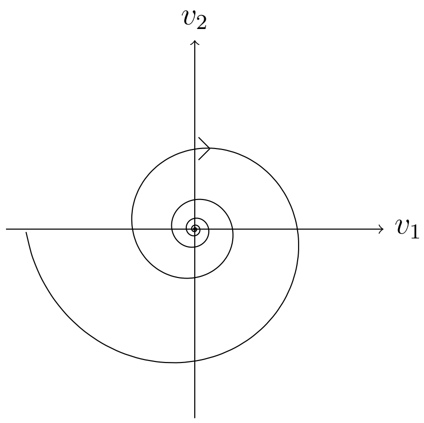
Nun gilt: Die Funktionen $v_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$v_1(t) := Re(u_1(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2(t) := Im(u_1(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

bilden ein reellwertiges Fundamentalsystem.

(d) Skizzen (links: exakt, rechts: auch ok!):





Bemerkung: $\|v_1\|, \|v_2\| \to \infty$ für $t \to \infty$.