RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
**Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape**
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc.
SoSe 15

# Klausur: Höhere Mathematik II

22. September 2015
Dauer: 90 Minuten

**Aufgabe 1**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

**Lösung**
Wir bestimmen die Determinante über die Entwicklung nach der 3. Spalte (Laplacescher Entwicklungssatz):

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)(-1)^{3+1} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=0,\text{ 2 l.a. Zeilen}} + 1(-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 1(-1)^{3+4} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=0,\text{ 2 l.a. Zeilen}} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} 4. \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \det(B) &\overset{\text{III'=III-II}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{=} 1(-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} 4 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2**
Für $x \geq e^{\pi/8}$ sei die Funktion $G : \left[e^{\pi/8}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G(x) := \int_{\pi/4}^{\log(x^2)} \frac{e^{2t} - 16}{\sqrt{e^{-t} + e^t + 2}}\, \mathrm{d}t\,.$$

**(a)** Berechnen Sie $G\left(e^{\pi/8}\right)$ und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$.
**(b)** Berechnen Sie die Extremstellen von $G$ und bestimmen Sie deren Typ. In welchen Bereichen ist $G$ streng monoton?
**(c)** Leiten Sie aus den obigen Ergebnissen ab, wie viele Nullstellen $G$ hat.
**Hinweis:** Es gilt $e^{\pi/8} < 2$.

**Lösung**
**(a)**

$$G(e^{\frac{\pi}{8}}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\log\left(\left(e^{\frac{\pi}{8}}\right)^2\right)} \frac{e^{2t} - 16}{\sqrt{e^{-t} + e^t + 2}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{2t} - 16}{\sqrt{e^{-t} + e^t + 2}} dt = 0$$

$\underline{\lim_{x\to\infty} G(x)}$

- Variante 1:

$$\begin{aligned} f(t) := \frac{e^{2t} - 16}{\sqrt{e^{-t} + e^t + 2}} &\overset{\text{für } t \geq 0}{\geq} \frac{e^{2t} - 16}{\sqrt{4e^t}}, \quad \text{da } \cosh(t) \geq 1 \\ &\overset{\text{für } t \geq 5/2}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{2}\right) e^{2t}}{2\sqrt{e^t}} = \tfrac{1}{4} e^{3t/2} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} G(x) \geq \int_{\pi/4}^{5/2} f(t)\, dt + \lim_{x\to\infty} \int_{5/2}^{\log(x^2)} 1\, dt = \infty$$

- Variante 2:
  Nach **(b)** ist $G'(x) = \frac{x^4-16}{x^2+1}$.

$$G'(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 > 17$$

  Da $x^4 - x^2$ monoton steigend und $3^4 - 3^2 = 72 > 17$ gilt, ist $G'$ für $x > 3$ nach unten durch 1 beschränkt.
  Somit gilt $\lim_{x\to\infty} G(x) = \infty$.

**(b)** Sei $f\colon [\frac{\pi}{4}, \infty) \to \mathbb{R}$ def. durch $f(t) = \frac{e^{2t}-16}{\sqrt{e^{-t}+e^{t}+2}}$. $f$ ist überall stetig und besitzt eine Stammfunktion F.
Damit gilt $G(x) = F(\log(x^2)) - F(\frac{\pi}{4})$. $G$ ist somit differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
G'(x) &= F'(\log(x^2)) \cdot (\log(x^2))' \\
&= f(\log(x^2)) \cdot \frac{2}{x} = \frac{e^{2\log(x^2)} - 16}{\sqrt{e^{-\log(x^2)} + e^{\log(x^2)} + 2}} \cdot \frac{2}{x} \\
&= \frac{2(x^4-16)}{\sqrt{x^4+2x^2+1}} = 2\frac{x^4-16}{x^2+1} \\
G'(x) > 0 &\Leftrightarrow x^4 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow x > 2( \quad \vee x < -2) \\
&\Rightarrow G'(x) < 0 \text{ und somit } G \text{ monoton fallend für } e^{\pi/8} \leq x < 2, \\
&\quad\; G'(x) > 0 \text{ und somit } G \text{ monoton steigend für } x > 2.
\end{aligned}$$

Somit hat $G$ an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum.
Wegen **(a)** ist dieses auch global.
Da es keine weiteren kritischen Punkte gibt, gilt ebenfalls mit **(a)**, dass $(e^{\pi/8}, 0)$ lokales, aber kein globales Maximum von $G$ ist.

**(c)** Nach **(b)** ist $G$ monoton fallend für $e^{\pi/8} \leq x < 2$ und monoton steigend für $x > 2$.
Somit hat $G$ zwei Nullstellen, eine bei $x = e^{\pi/8}$ und eine weitere für $x > 2$, da $G(2) < 0$ (wegen Monotonie) und $\lim_{x\to\infty} G(x) = +\infty$. Da $G$ nach **(b)** stetig ist, muss $G$ deshalb nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in diesem Bereich haben.

**Aufgabe 3**

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int\limits_0^1 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x$.

**Lösung**

1. Möglichkeit:
   Im ersten Schritt integriert man partiell. Setze $u(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ und $v'(x) = 1$. Dann ergibt sich $u'(x) = -\frac{1}{1+(1+x)^2}$ und $v(x) = x$. Somit erhält man

$$\int\limits_0^1 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) dx = x \cdot \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\Bigg|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{x}{1+(1+x)^2} dx.$$

   Substituiere $y = x+1$, also $dy = dx$

$$\begin{aligned}
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 0 + \int\limits_1^2 \frac{y-1}{1+y^2} dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_1^2 \frac{2y}{1+y^2} dy - \int\limits_1^2 \frac{1}{1+y^2} dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(1+y^2\right)\big|_1^2 - \arctan\left(y\right)\big|_1^2 \\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{5}{2}\right) - \arctan(2) + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit:
   Im ersten Schritt substituiert man $y = \frac{1}{1+x}$, also $dx = -\frac{1}{y^2} dy$ und erhält

$$\int\limits_0^1 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) dx = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2} \cdot \arctan(y) dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y^2} \cdot \arctan(y) dy.$$

   Nun integriert man partiell. Setze $u(y) = \arctan(y)$ und $v'(y) = \frac{1}{y^2}$, also $u'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ und $v(y) = -\frac{1}{y}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{y} \cdot \arctan(y)\big|_{\frac{1}{2}}^1 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy \\
&= -\arctan(1) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} dy \\
&= -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \log(y)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2} \cdot \log(1+y^2)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{5}{2}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, stimmen beide Lösungen überein.

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ z.B. mit der Halbwinkelmethode.

**Lösung**

Mit Halbwinkelmethode: Es gilt $\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2(1+y^2)}{2y(1-y^2)}dx \qquad\qquad \text{mit } y=\tan\left(\frac{x}{2}\right),\ dx = \frac{2dy}{1+y^2} \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+y^2)}{y(1-y^2)} &= \frac{A}{y}+\frac{B}{1-y}+\frac{C}{1+y} \\
\Leftrightarrow\ 1+y^2 &= A(1-y^2)+By(1+y)+Cy(1-y) \\
y=1 \text{ einsetzen } &\Rightarrow\ B=1,\quad y=-1 \text{ einsetzen } \Rightarrow\ C=-1,\quad y=0 \text{ einsetzen } \Rightarrow\ A=1 \\
(*) &= \int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{1-y}dy - \int \frac{1}{1+y}dy \\
&= \log|y| - \log|1-y| - \log|1+y| + c,\quad c\in\mathbb{R} \\
&= \log\left|\frac{y}{1-y^2}\right| + c \\
&= \log\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c \\
&= \log\left|\frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right| + c \\
&= \log|\tan(x)| + \tilde{c},\quad \tilde{c}\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1}{\tan(x)}(\tan(x))'dx
\end{aligned}$$

Subst. $y=\tan(x)$, $\frac{dy}{dx} = \tan'(x)$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{y}dy \\
&= \log|y| + c,\quad c\in\mathbb{R} \\
&= \log|\tan(x)| + c
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

**(a)** Bestimmen Sie für das homogene Differentialgleichungssystem $u' = A \cdot u$ ein Fundamentalsystem (d.h. eine Lösungsbasis) von reellwertigen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto u(t)$.

**(b)** Bestimmen Sie mithilfe des unter **(a)** ermittelten Fundamentalsystems die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t),\ t > 1, \\ u(1) = e \cdot (-2, -3, 5/2)^\top. \end{cases}$$

**Lösung**

(a)

1. Bestimme die Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = -(\lambda - 1)^3$$

Einziger Eigenwert ist $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3.

2. Bestimme die Eigenvektoren zu $\lambda = 1$:

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor ablesen: $v := (0, 0, 1)^\top$

Die Matrix hat Rang 2 (2 linear unabhängige Zeilen), damit hat der Kern der Matrix (also der Eigenraum) die Dimension $3 - 2 = 1$. Es gibt somit keine weiteren von $v$ linear unabhängigen Eigenvektoren.

3. Bestimme Kette von Hauptvektoren:

$$\begin{aligned} (A - 1 \cdot E_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \ker(A - 1 \cdot E_3)^2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ (A - 1 \cdot E_3)^3 &= 0 \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad &\Rightarrow \quad \ker(A - 1 \cdot E_3)^3 = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Wähle einen Hauptvektor aus $\ker(A - 1 \cdot E_3)^3 \setminus \ker(A - 1 \cdot E_3)^2$, z.B. $h_1 := (1, 0, 0)^\top$. Dann ergibt sich die Hauptvektorkette:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 := (A - 1 \cdot E_3) \cdot h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ und } h_3 := (A - 1 \cdot E_3) \cdot h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Fundamentalsystem von Lösungen:

$$u_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2(t) = e^t \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], u_3(t) = e^t \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

(b)
Die Lösung zum vorgegebenen Startwert ist:

$$u(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t) + c_3 \cdot u_3(t),$$

wobei die Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ durch den Startwert bestimmt werden. Man erhält, wegen

$$u(1) = e \begin{pmatrix} -c_2 \\ -c_2 - c_3 \\ -c_1 + c_2 + {}^3\!/_2 c_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} e \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ {}^5\!/_2 \end{pmatrix},$$

die Konstanten $(c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 1)$.