RWTHAACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
SS 2019

Klausur: Höhere Mathematik II

03.08.2019
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

und $Id \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sei die Einheitsmatrix.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A - 2Id)$.

(b) Bestimmen Sie zu sämtlichen Eigenwerten von A algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Berechnen Sie $\det\Big([A \cdot B]^{-1}\Big)$.

(d) Entscheiden Sie begründet: Ist B diagonalisierbar?

Lösung

(a) Löse das homogene Gleichungssystem $\big(\, A - 2Id \,|\, 0 \,\big)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Folglich ist die zweite und dritte Variable frei wählbar und man erhält

als mögliche Basis des Kerns: $$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Bestimme zunächste die Eigenwerte als Nullstellen des charakterischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \det\big(A - \lambda Id\big) &= (-1)^{4+4} \cdot (1-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \Big[(4-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + 4(2-\lambda)\Big] \\ &= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

An den Expoeneten im charakteristischen Polynom lesen wir ab:
- $algV(1) = 1$ und da stets $1 \leq geomV(\cdot) \leq algV(\cdot)$ gilt, folgt sofort: $geomV(1) = 1$.
- $algV(2) = 3$

• Für $geomV(2)$ ist die Dimension des Eigenraumes zu 2 zu ermitteln.
Nach **(a)** gilt also: $Dim\big(ER(2)\big) \;=\; geomV(2) \;=\; 2\,.$

(c) Die Determinante von A ist mittels Laplace-Entwicklung entlang zuerst vierter und dann zweiter Spalte am einfachsten zu ermitteln:

$$\det\big(A\big) \;=\; 1\cdot 2\cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 2\cdot\big(0-(-2)\cdot 2\big) \;=\; 8$$

Die gleiche Entwicklungsreihenfolge liefert für B:

$$\det\big(B\big) \;=\; 1\cdot(-1)\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; -\big(0-(-1)\big) \;=\; -1$$

Auf Grund der Eigenschaften der Determinante gilt damit:

$$\det\Big([A\cdot B]^{-1}\Big) \;=\; \frac{1}{\det\Big(A\cdot B\Big)} \;=\; \frac{1}{\det\Big(A\Big)\cdot\det\Big(B\Big)} \;=\; \frac{1}{8\cdot(-1)} \;=\; -\frac{1}{8}$$

(d) Bestimme zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
\det\big(B-\lambda Id\big) \;&=\; (-1)^{4+4}\cdot(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&=\; (1-\lambda)\cdot\Big[(2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)-1-(-2\lambda)\Big] \\
&=\; (1-\lambda)\cdot\Big[-2\lambda+\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3-1+2\lambda\Big] \\
&=\; (1-\lambda)\cdot\Big[-\lambda^3+3\lambda^2-1\Big]
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 1$ Nullstelle und damit Eigenwert von B.
Alle weiteren Eigenwerte von B müssen nun Nullstellen von $f(\lambda) := -\lambda^3+3\lambda^2-1$ sein.

1. **Alternative:** Teste $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ als Teiler des absoluten Gliedes:
   $f(1) = 1 > 0\,,\quad f(-1) = 3 > 0$
   Wir werden also keinen Erfolg mittels Polynomdivision haben, aber da offensichtlich $f(0) = -1 < 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ gilt, muss f bei drei Vorzeichenwechseln

   $$f(-1)=3>0 \qquad f(0)=-1<0 \qquad f(1)=1>0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

   als kubisches Polynom **drei einfache Nullstellen** haben!
2. **Alternative:** Offenbar hat $g(\lambda) := -\lambda^3+3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda)$ eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 0$ und eine einfache Nullstelle bei $\lambda = 3$. Da $g(1) = 2$ muss g in den Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ und $(1,3)$ den Wert 1 annehmen (Zwischenwertsatz). Folglich hat f als kubisches Polynom drei einfache Nullstellen.

Da $\lambda_1 = 1$ keine Nullstelle von f ist, sind **alle 4 Eigenwerte** von B **paarweise verschieden** und B damit diagonalisierbar.

Aufgabe 2
Gegeben sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \int_1^{\exp(x^2)} \frac{\left(\log^2(t) - 16\right)}{\sqrt{t^2 + 2t\log(t) + \log^2(t)}}\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass g wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie das 2–te Taylorpolynom von g um $x_0 = 0$.

(c) Geben Sie alle Extremstellen von g und deren Typ an.

Lösung

(a) Es gilt für $t \geq 1$

$$t^2 + 2t\log(t) + \log(t)^2 \geq 1 + 2 \cdot 1 \cdot \log(1) + 0 = 1.$$

Damit ist $f(t) := \frac{\left(\log^2(t)-16\right)}{\sqrt{t^2+2t\log(t)+\log^2(t)}}$ stetig auf $[1, \underbrace{\exp(x^2)}_{\geq 1}]$ als Komposition stetiger Funktionen und somit integrierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also ist g wohldefiniert.

(b) Es wird zuerst der Integrant vereinfacht zu:

$$\frac{\left(\log^2(t) - 16\right)}{\sqrt{t^2 + 2t\log(t) + \log^2(t)}} = \frac{\log^2(t) - 16}{\sqrt{\underbrace{(t + \log(t))^2}_{>0}}} = \frac{\log^2(t) - 16}{t + \log(t)}$$

für alle $t \geq 1$. Das zweite Taylorpolynom von g ist

$$T_2(x; 0, g) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2.$$

Wir berechnen die Ableitungen von g: Da f stetig ist, ist mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y \mapsto \int_1^y f(t)dt$$

stetig differenzierbar mit Ableitung $f(y)$. Mit der Kettenregel folgt

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(x^2)) \cdot \frac{\log^2(\exp(x^2)) - 16}{e^{x^2} + \log(\exp(x^2))} = 2x\exp(x^2) \cdot \frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2}.$$

Obige Funktion ist wieder als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x\exp(x^2)) \cdot \frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2} + 2x\exp(x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2}\right) \\ &= \left(2\exp(x^2) + 4x^2\exp(x^2)\right) \cdot \frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2} + 2x\exp(x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2}\right). \end{aligned}$$

Mit $x = 0$ sieht man $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ und

$$g''(0) = 2 \cdot \frac{-16}{1 + 0} = -32$$

Daraus folgt $T_2(x; 0, g) = -16x^2$.

(c) Wir berechnen die kritischen Punkte von g. Zunächst ist $a(x) := e^{x^2} + x^2 \geq 1 + 0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit **(a)**

$$
\begin{aligned}
& g'(x) = 2x \underbrace{\exp(x^2)}_{>0} \cdot \frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = 0 \quad \vee \quad \frac{x^4 - 16}{e^{x^2} + x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \vee \quad x^4 - 16 = 0.
\end{aligned}
$$

Die kritischen Punkte sind also $0, 2,$ und -2.
Mit $g''(0) = -32 < 0$ folgt sofort, dass $x = 0$ ein lokales Maximum ist.
Es ist außerdem

$$
g'(1) = 2e \cdot \frac{(-15)}{a(1)} < 0, \quad g'(3) = 6e^9 \cdot \frac{65}{a(3)} > 0,
$$

also liegt ein Vorzeichenwechsel von g' bei $x = 2$ vor und $x = 2$ ist ein lokales Minimum.
Wegen der Achsensymmetrie $g(x) = g(-x)$ gilt dies auch für $x = -2$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mithilfe einer hyperbolischen Substitution

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{x^2+2x+5}}\,.$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{(1+x)^2+4}} \underset{\mathrm{d}y=\mathrm{d}x}{\overset{y=x+1}{=}} \int \frac{\mathrm{d}y}{y+\sqrt{y^2+4}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}y}{y+2\sqrt{\frac{1}{4}y^2+1}} \underset{\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathrm{d}y}{\overset{z=\frac{1}{2}y}{=}} \int \frac{\cancel{2}\mathrm{d}z}{\cancel{2}z+\cancel{2}\sqrt{z^2+1}} \\
&\underset{\cosh(\xi)\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}z}{\overset{\sinh(\xi)=z}{=}} \int \frac{\cosh(\xi)}{\sinh(\xi)+\cosh(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \quad (*) \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(e^{\xi}+e^{-\xi})}{\frac{1}{2}(e^{\xi}-e^{-\xi})+\frac{1}{2}(e^{\xi}+e^{-\xi})}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}\xi + \int e^{-2\xi}\,\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2\xi} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{-2\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)} + c \quad (**)
\end{aligned}$$

Alternative ab $(*)$:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\cosh(\xi)\left(\cosh(\xi)-\sinh(\xi)\right)}{\cosh^2(\xi)-\sinh^2(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int \cosh^2(\xi)-\cosh(\xi)\sinh(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)+\xi}{2} - \frac{\sinh^2(\xi)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{\sinh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\cosh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2} - \frac{\sinh^2\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{4}} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{(x+1)^2}{4}\right] + c
\end{aligned}$$

Noch zu $(**)$:

$$e^{-2\operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \left[e^{\log\left(\frac{x+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)}\right]^{-2} = \left[\frac{x+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right]^{-2}$$

Aufgabe 4

Sind die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Begründen Sie ihre Antwort kurz.

(a) Jede Funktion $f \in C_{st}[a, b]$ (mit reellen Zahlen $a < b$) hat eine Stammfunktion F mit $F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in [a, b]$.

(b) Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die bei x_0 unendlich oft differenzierbar ist, ist lokal gleich ihrer Taylor–Reihe, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$f(x) \;=\; T(x;\; x_0, f) \qquad \forall\ x \in (x_0 - \varepsilon\,,\; x_0 + \varepsilon)\,.$$

(c) Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

Lösung

(a) Falsch, Gegenbeispiel $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nicht stetig in $x_0 = 0$ und es gibt keine in x_0 differenzierbare Stammfunktion. Kandidat wäre $F(x) = |x|$.
Alternative: Nach den HDI muss $f \in C_{st}[a, b]$ in $x_0 \in (a, b)$ zusätzlich **stetig** sein, damit eine Stammfunktion existiert.

(b) Falsch, Gegenbeispiel ist $f(x) = \exp(-1/x^2), x \neq 0$ und $f(0) = 0$ mit Taylorreihe $T(\bullet; 0, f) = 0$. Hinweis: Hier muss nicht explizit das Gegenbeispiel stehen, aber dass ein Gegenbeispiel mit Taylorreihe konstant 0 existiert.

(c) Falsch, gilt allgemein nur für kommutative Matrizen.

Aufgabe 5

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= (u^2 - u) \cdot \cosh(t)\,, \\ u(0) &= \frac{1}{1-e^2}\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $u = u(t)$ von $(*)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Lösung aus (a) definiert?

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$, untersuchen Sie u auf Monotonie und skizzieren Sie u.

Lösung

(a) Seien $f(t) := \cosh(t)$ und $g(u) := u^2 - u = u(u-1)$, dann sind f und g stetig auf $\mathbb{R}$. Für $u \notin \{0, 1\}$ ist $g(u) \neq 0$ und nach Satz 7.1.17 gilt für die Lösung u der Differentialgleichung mit Anfangswert $u_0 = u(t_0)$:

$$\begin{aligned} & \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{s(s-1)}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \cosh(s)\,\mathrm{d}s \\ \Leftrightarrow\ & \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{s-1}\,\mathrm{d}s - \int_{u_0}^{u(x)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \sinh(t) + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \log\left(|u(t)-1|\right) - \log\left(|u(t)|\right) = \sinh(t) + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \left|\frac{u(t)-1}{u(t)}\right| = c \cdot e^{\sinh(t)}, \quad c > 0 \quad (c = e^{\tilde{c}}) \\ \Leftrightarrow\ & u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - c\cdot e^{\sinh(t)}}, & u(t) < 0 \vee u(t) > 1 \\ \dfrac{1}{1 + c\cdot e^{\sinh(t)}} & 0 < u(t) < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen $\sinh(0) = 0$ und $u(0) = \dfrac{1}{1-e^2} < 0$ folgt somit

$$u(t) = \frac{1}{1 - e^2 \cdot e^{\sinh(t)}} = \frac{1}{1 - e^{2+\sinh(t)}}.$$

(b) Es gilt

$$1 - e^{2+\sinh(t)} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + \sinh(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \operatorname{arsinh}(-2) < 0,$$

d.h. die Lösung aus (a) ist für alle $t \in (\operatorname{arsinh}(-2), \infty)$ definiert.

(c) Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \sinh(t) = \infty$ und damit $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.

1. Alternative: Es ist $u < 0$, da $u(0) = \frac{1}{1-e^2} < 0$ und damit $u' = \underbrace{u}_{<0} \cdot \underbrace{(u-1)}_{<0} \cdot \underbrace{\cosh}_{>0} > 0$. Folglich ist u streng monoton wachsend.

2. Alternative: Für $I := (\operatorname{arsinh}(-2), \infty)$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} &\sinh(t) \text{ streng monoton wachsend auf } I \\ \Rightarrow\; &e^{2+\sinh(t)} \text{ streng monoton wachsend auf } I \\ \Rightarrow\; &1 - e^{2+\sinh(t)} \text{ streng monoton fallend auf } I \\ \Rightarrow\; &u(t) \text{ streng monoton wachsend auf } I. \end{aligned}$$

<u>**Skizze:**</u> Singularität bei $t = \operatorname{arsinh}(-2)$ und $u(t) \to 0$ für $t \to \infty$.