RWTH AACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc. 17.09.2019
SS 2019

Klausur: Höhere Mathematik II

Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit $b := (-1, 0, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^4$.

(b) Geben Sie J_A, die Jordansche Normalform von A, sowie ein $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $P^{-1}AP = J_A$ an.

Lösung

(a) Löse das Gleichungssystem

$$\left(A \,\middle|\, b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{und erhalte } x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **<u>Klassisches Vorgehen:</u>**
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \det\Big(A - \lambda Id\Big) &= (3-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot \Big[(2-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - (5-\lambda)\Big] \\ &= (3-\lambda)(5-\lambda)\big[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\big] = -(3-\lambda)^2(5-\lambda)(\lambda-1) \end{aligned}$$

sind die Eigenwerte von A und lauten (mit Vielfachheit) 1, 5, 3 und 3.
Um die Eigenvektoren zu bestimmen müssen Basen zu den Eigenräumen ($ker\big(A - \lambda Id\big)$) ermittelt werden:

- $ker\big(A - Id\big) = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $ker\big(A - 5Id\big) = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$
- $ker\big(A - 3Id\big) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Damit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 3 also 2 und eine Eigenvektorbasis existiert.

Diese Basis als Matrix notiert ist das gesuchte P, zum Beispiel $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Die Jordansche Normalform ist damit: $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (abhängig von P!).

<u>**Alternativer Lösungsweg** zu **(b)**:</u>

In **(a)** wurde ein Vektor mit der Eigenschaft $Ax = x$ gefunden, ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

An der Gestalt der Matrix ist sofort $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ abzulesen.

Da die Zeilensummen in der ersten und vierten Zeile gleich sind, liegt es nahe nach $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch noch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als möglichen Eigenvektor zu testen: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Damit wurden vier linear unabh. Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1, 5, 3 und 3, also eine Eigenvektorbasis des $\mathbb{R}^4$, gefunden und die Jordansche Normalform der Matrix A ist eine Diagonalmatrix (abhängig von P!)

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

während P aus den Eigenvektoren zusammen gesetzt ist (zum Beispiel):

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f\colon \left[\,\frac{1}{2}\,,\,\infty\right) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; 8^x \,-\, x\left[\log(8x)\,-\,1\right] \,+\, \log 8\,.$$

(a) Man beweise, dass f auf $\left[\,\frac{1}{2}\,,\,\infty\right)$ strikt konvex ist.

(b) Man zeige mit Hilfe von **(a)**, dass f auf $\left[\,\frac{1}{2}\,,\,\infty\right)$ streng monoton wachsend ist.

(c) Aus **(b)** folgt bekanntlich, dass zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert. Man bestimme den Definitions- und Wertebereich von g, $\mathcal{D}(g)$ und $\mathcal{W}(g)$, und zeige, dass $9 \in \mathcal{D}(g)$.

(d) Man berechne die Zahlenwerte $g(9)\,,\;g'(9)$.

Lösung

(a)

Für $x > 0$ ist $\log(8x)$ stetig diffbar und damit die Funktion f auf $(0, \infty)$, also insbesondere auf $[\frac{1}{2}, \infty)$, stetig diffbar als Komposition stetig diffbarer Funktionen. Es gilt:

$$f'(x) = \log(8) \cdot 8^x - \log(8x) + 1 - 1 = \log(8) \cdot 8^x - \log(8x)$$

und damit

$$\begin{aligned} f''(x) &= \log(8)^2 \cdot 8^x - \frac{1}{x} \overset{x \geq 1/2}{\geq} \log(8)^2 8^x - 2 \\ &> 8^x - 2 \geq \sqrt{8} - 2 > \sqrt{4} - 2 = 0, \end{aligned}$$

wobei $\log(8) > 1$, da $e < 8$ und der Logarithmus streng monoton wachsend ist. Da somit $f''(x) > 0$ für alle $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$, ist f strikt konvex auf diesem Intervall nach Vorlesung.

(b)

Es gilt

$$f'(\frac{1}{2}) = \log(8)\sqrt{8} - \log(4) = 3\sqrt{8}\log(2) - 2\log(2) > 0,$$

da $3\sqrt{8} > 3 > 2$ und $\log(2) > \log(1) = 0$.

Weiterhin ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Damit ist $f'(x) > 0$ für $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ und f selbst ist folglich streng monoton wachsend .

(c)

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(g) &= \mathcal{D}(f) = [\frac{1}{2}, \infty) \\ \mathcal{D}(g) &= \mathcal{W}(f) \\ &= [f(\frac{1}{2}), \infty) = [\sqrt{8} + \frac{1}{2} + 2\log 2, \infty) \text{ da} \end{aligned}$$

f streng monoton wachsend, $D(f)$ unbeschränkt in positiver Richtung, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und f stetig, sowie

$$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{8} - \frac{1}{2}(\log(4) - 1) + \log 8 = \sqrt{8} - \log 2 + \frac{1}{2} + 3\log 2 = \sqrt{8} + \frac{1}{2} + 2\log 2.$$

Damit ist jedoch auch

$$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{8} + \frac{1}{2} + 2\log 2 < \sqrt{9} + 1 + 2 \cdot 2 = 8 < 9$$

und somit $9 \in \mathcal{D}(g)$.

(d)

Es gilt

$$f(1) = 8^1 - 1 \cdot (\log 8 - 1) + \log 8 = 8 - \log 8 + 1 + \log 8 = 9$$

Und damit $g(9) = 1$.

Weiterhin gilt $f'(1) = 8\log 8 - \log 8 = 24\log 2 - 3\log 2 = 21\log 2 > 0$, da $\log 2 > 0$. Damit ist die Umkehrregel anwendbar und es gilt nach Vorlesung

$$g'(9) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{21\log 2}.$$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) := \frac{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2}{(x-1)^2\,(1+x^2)}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Lösung
Eine Polynomdivision liefert, dass $f(x) := \frac{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2}{(x-1)^2(1+x^2)} = x^2 + \frac{x^3}{(x-1)^2(1+x^2)}$.
Für eine Partialbruchzerlegung machen wir nun den Ansatz

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \qquad (\star)$$

mit Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Alternative 1: Wir multiplizieren $(\star)$ mit $(x-1)^2(1+x^2)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&x^3 = A(x-1)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x-1)^2\\
\Leftrightarrow\, &x^3 = A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x^2 - 2x + 1)\\
\Leftrightarrow\, &x^3 = A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2+1) + C(x^3 - 2x^2 + x) + D(x^2 - 2x + 1)\\
\Leftrightarrow\, &x^3 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D).
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A + C &= 1\\
-A + B - 2C + D &= 0\\
A + C - 2D &= 0\\
-A + B + D &= 0,
\end{aligned}$$

welches wir über die erweiterte Koeffizientenmatrix lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV+ I}]{\substack{\text{II + I} \\ \text{III - I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV - II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C = 0 \wedge D = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow B = \frac{1}{2} \wedge A = 1.$$

insgesamt gilt daher

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Nun gilt nach Vorlesung (Standardintegrale)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \log(|x-1|) - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alternative 2: Multiplizieren wir $(\star)$ mit $(x-1)^2$ und setzen $x = 1$, so folgt $B = \frac{1}{2}$. Multiplizieren wir $(\star)$ hingegen mit $(1+x^2)$ und setzen $x = \pm i$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$C \cdot i + D = \frac{1}{2}$$
$$C \cdot (-i) + D = \frac{1}{2},$$

welches die reelle Lösung $C = 0$ und $D = \frac{1}{2}$ hat. Wir erhalten somit für $(\star)$

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Mit $x = 0$ folgt schließlich $A = 1$ und wir erhalten insgesamt

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Nun gilt nach Vorlesung (Standardintegrale)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \log(|x-1|) - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

Sind die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Begründen Sie Ihre Aussage kurz.

(a) Die Punkte $\Big(\cosh(t)\,,\,\sinh(t)\Big) \in \mathbb{R}^2$ liegen für alle $t \in \mathbb{R}$ auf einer Ellipse.

(b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ als Eigenwert hat, hat auch $\overline{\lambda}$ als Eigenwert.

(c) Für eine stückweise stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es (mindestens) ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi)\cdot(b-a)\,.$$

Lösung

(a) Falsch, denn $\lim\limits_{t\to\infty} \cosh(t) \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \;=\; \infty$, d.h. $\Big\{\Big(\cosh(t)\,,\,\sinh(t)\Big) \;:\; t \in \mathbb{R}\Big\}$ ist unbeschränkt und kann daher keine Ellipse sein.

(a) Alternative Falsch, denn $\Big(\cosh(t)\,,\,\sinh(t)\Big)$, $t \in \mathbb{R}$ bilden nach Vorlesung eine Hyperbel.

(b) Wahr, denn das charakteristische Polynom ist reell, d.h. zu einer beliebigen komplexen Nullstelle λ muss auch die komplex Konjugierte $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle sein.

(b) Alternative Wahr. Falls $v \in \mathbb{C}^n$ EV zu EW $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann ist

$$A \cdot \overline{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}, \text{ also } \overline{v} \text{ EV zum EW } \overline{\lambda}.$$

(c) Falsch. Gegenbeispiel: Definiere zu $[a,b] := [-1,1]$ die stückweise stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } x \le 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

aber $f(\xi)\cdot(b-a) = f(\xi)\cdot(1-(-1)) = 2f(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in [-1,1]$.

(c) Alternative Falsch. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung braucht, dass f stetig ist.

Aufgabe 5

Entscheiden Sie begründet: Sind die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent oder divergent?

(a) $$\int_2^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) $$\int_2^\infty \frac{\sin(3x)}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung

(a) Für $x \geq 2$ ist $2\sqrt{2}\sqrt{x} \geq 2 \cdot 2 = 4$, und damit

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\cos(x)+3} \geq \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+4} \geq \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+2^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} = (1+2^{\frac{3}{2}})^{-1}x^{-\frac{1}{6}}.$$

Wegen $\frac{1}{6} < 1$ konvergiert $(1+2^{\frac{3}{2}})^{-1}\int_2^\infty x^{-\frac{1}{6}}\mathrm{d}x$ nicht, also nach dem Vergleichskriterium auch nicht $\int_2^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x$.

(b) Mit der Substitution $y = x+3$ folgt

$$\lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{\sin(3x)}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_5^{R+3} \sin(3y-9)y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int_5^\infty \sin(3y-9)y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $f : [5,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \sin(3y-9)$, ist stetig und für $F(z) := \int_5^z f(y)\mathrm{d}y$ gilt

$$|F(z)| = \left|-\frac{1}{3}[\cos(3z-9)-\cos(6)]\right| \leq \frac{2}{3},$$

F ist also beschränkt. Mit Lemma 6.9.12 aus der Vorlesung konvergiert $\int_5^\infty f(y)y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L_{hom} des linearen Differentialgleichungssystems

$$u'(t) \;=\; Au(t)\,, \quad \text{wobei} \quad A \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Welche Lösung erfüllt das Anfangswertproblem mit $u(0) \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Skizzieren Sie diese Trajektorie in der u_1, u_2–Ebene (nur qualitatives Diagramm mit Hilfslinien) und benennen Sie den Typ der Ruhelage $u \equiv 0$.

Lösung

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1,$$

d.h. die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ und $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Weiter ist

$$\ker(A - \lambda_1 E_2) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

und

$$\ker(A - \lambda_2 E_2) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

womit die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems gegeben ist durch

$$u(t) = c_1 e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ein Einsetzen des Anfangswertes liefert

$$u(0) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = \frac{3}{2} \wedge c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$u(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Ruhelage $u \equiv 0$ ist instabil (Sattelpunkt), da beide Eigenwerte entgegengesetze Vorzeichen besitzen.
Skizze: