Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom — 3. August 2013
SoSe 13 — Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik II

Aufgabe 1 **[8 Punkte]**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Beweisen Sie:

$$\text{Aus „}f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)\text{“} \quad \text{folgt} \quad \text{„}f \text{ ist monoton wachsend auf } [a, b]\text{“}.$$

Lösung

Sei $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$. Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Aus dem Mittelwertsatz folgt: $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. **[5]**
Da $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ ist $f'(\xi) \geq 0$, und da $x_1 < x_2$ ist auch $(x_2 - x_1) \geq 0$. Somit folgt die Behauptung aus

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$ **[3]**

Aufgabe 2 **[4+3=7 Punkte]**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)^{x^{-2}}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log[(2-x)^p]}{x-1}$, $p > 0$.

Lösung

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)^{x^{-2}}$ ist vom Typ „∞^0“. Es gilt $(x+2)^{x^{-2}} = \exp\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \log(x+2)\right)$. Da $\exp(\cdot)$ stetig ist, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \log(x+2)\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} \cdot \log(x+2)\right)$. Untersuche also noch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x+2)}{x^2}$. **[1]**

Mit $f(x) := \log(x+2)$ und $g(x) := x^2$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, also ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Um die Regel von de l'Hospital anzuwenden, betrachte $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $\quad g'(x) = 2x \neq 0 \;\forall\, x \neq 0$. **[1]**

Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x+2}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x(x+2)} = 0$. **[1]**

Da der letzte Grenzwert existiert, existieren nach der Regel von l'Hospital auch alle davor, und es gilt $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Also gilt $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)^{x^{-2}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x+2)}{x^2}\right) = \exp(0) = 1$. **[1]**

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln[(2-x)^p]}{x-1}$, $p > 0$, ist vom Typ „$\frac{0}{0}$“. Mit $f(x) := \ln[(2-x)^p] = p\ln(2-x)$ und $g(x) := x-1$ folgt $f'(x) = \dfrac{-p}{2-x}$, $g'(x) = 1 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. **[1]**

Dann gilt $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{-p}{2-x}}{1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-p}{2-x} = \dfrac{-p}{1} = -p$. **[1]**

Da der letzte Grenzwert existiert, existieren nach der Regel von l'Hospital auch alle davor, und es gilt $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -p$. **[1]**

Aufgabe 3 **[8+6+6=20 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{3y}{y^3-2y^2+y-2}\,dy$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{\arcsin(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

(c) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert.

Lösung

(a) Zunächst hat man $y^3-2y^2+y-2=(y-2)\cdot(y^2+1)$.
Somit erhält man $\int_0^1 \frac{3y}{y^3-2y^2+y-2}\,dy = \int_0^1 \frac{3y}{(y-2)\cdot(y^2+1)}\,dy$. **[1]**
Um dieses Integral zu lösen, verwendet man zunächst Partialbruchzerlegung. Wähle den Ansatz

$$\frac{3y}{(y-2)\cdot(y^2+1)} = \frac{A}{y-2} + \frac{By+C}{1+y^2}.$$
$$\Rightarrow 3y = A(1+y^2) + (By+C)\cdot(y-2). \quad \textbf{[2]}$$

Damit ergibt sich

$$A=\tfrac{6}{5}, C=\tfrac{1}{2}A=\tfrac{3}{5} \text{ und } B=-A=-\tfrac{6}{5}. \quad \textbf{[2]}$$

Damit erhält man also

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3y}{y^3-2y^2+y-2}\,dy &= \int_0^1 \frac{3y}{(y-2)\cdot(y^2+1)}\,dy\\ &= \int_0^1 \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{y-2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{2y}{1+y^2} + \frac{3}{5}\frac{1}{1+y^2}\\ &= \frac{6}{5}\log(|y-2|)\Big|_0^1 - \frac{3}{5}\log(1+y^2)\Big|_0^1 + \frac{3}{5}\arctan(y)\Big|_0^1\\ &= -\frac{6}{5}\log(2) - \frac{3}{5}\log(2) + \frac{3}{5}\arctan(1)\\ &= -\frac{9}{5}\log(2) + \frac{3}{5}\frac{\pi}{4}. \quad \textbf{[3]}\end{aligned}$$

(b) Betrachte zunächst für festes $b<2$ das Integral $\int_0^b \frac{\arcsin(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^b \frac{\arcsin(\frac{x}{2})}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,dx$. **[1]**
Wir substituieren $\frac{x}{2}=\sin(t)$, $dx=2\cos(t)\,dt$ und verwenden $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$. **[3]**
Man erhält

$$\int_0^{\arcsin(b/2)} \arcsin(\sin(t))\,dt = \int_0^{\arcsin(b/2)} t\,dt = \frac{1}{2}\arcsin^2(b/2) \overset{b\to 2}{\to} \frac{1}{2}\arcsin^2(1) = \frac{1}{8}\pi^2. \quad \textbf{[2]}$$

(c) Betrachte zunächst, für festes $b>1$, das Integral $\int_1^b \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ und verwende partielle Integration mit $u(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $v(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$. Dann erhält man **[2]**

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,dx &= -\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_1^b - \frac{1}{4}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}^3}\cos(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{2}\cos(2b) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{4}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{(x)^3}}\cos(2x)\,dx.\end{aligned}$$

Nun hat man einerseits **[1]**

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{2}\cos(2b) = 0,$$

und andererseits konvergiert das Integral **[1]**

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}^3}\cos(2x)\,dx,$$

denn man hat $\left|\frac{1}{\sqrt{x}^3}\cos(2x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}^3}$, und das Integral $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}$ konvergiert (VL). **[1]**
Insgesamt konvergiert somit auch $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$. **[1]**

Aufgabe 4 **[9 Punkte]**

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\underline{u}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{u}(t), \qquad \underline{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung

1. Berechne Eigenwerte

Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 15 = \lambda^2 - 4\lambda - 12. \qquad \textbf{[1]}$$

Damit sind die Eigenwerte

$$\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{4+12} \quad \text{das heißt } \lambda_+ = 6 \text{ und } \lambda_- = -2. \qquad \textbf{[1]}$$

2. Berechne Eigenvektoren

Wir erhalten direkt, dass für Eigenvektoren $\underline{v}_\pm = (x_\pm, y_\pm)^T$ von $\lambda_\pm$

$$-5x_+ + 5y_+ = 0 \quad \text{bzw.} \quad 3x_- + 5y_- = 0. \qquad \textbf{[2]}$$

gelten muss.

Daher können wir beispielsweise $\underline{v}_+ = (1,1)^T$ und $\underline{v}_- = (-5,3)$ wählen. **[1]**

3. Allgemeine Lösung

Als allgemeine Lösung erhalten wir nun

$$\underline{u}(t) = \alpha e^{6t}\underline{v}_+ + \beta e^{-2t}\underline{v}_- = \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} - 5\beta e^{-2t} \\ \alpha e^{6t} + 3\beta e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1]}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Anfangswertproblem

Lösen des Gleichungssystems

$$\underline{u}(0) = \begin{pmatrix} \alpha - 5\beta \\ \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

liefert direkt $\alpha = 6$ und $\beta = 1$. Daher ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 6e^{6t} - 5e^{-2t} \\ 6e^{6t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2]}$$

Aufgabe 5 **[10 Punkte]**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - xy + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, und geben Sie deren Typ an.

Lösung

f ist als Produkt bzw. Summe zweifach stetig differenzierbarer Funktionen zweifach stetig differenzierbar. **[1]**

Für die partiellen Ableitungen gilt: **[3]**

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x - y + 2, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y - x - 1,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2 \text{ und}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = -1 = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y).$$

Mit der notwendigen Bedingung für kritische Punkte,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \qquad \textbf{[1]}$$

erhält man das Gleichungssystem **[1]**

$$\begin{cases} 2x = y - 2, \\ 2y = x + 1. \end{cases}$$

Elementares Umformen und Einsetzen liefert als einzigen kritischen Punkt **[1]**

$$K = (-1, 0).$$

Weiter gilt

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]_{|(x,y)=(-1,0)} = -3 < 0$$

und

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right]_{|(x,y)=(-1,0)} = 2 > 0. \qquad \textbf{[2]}$$

Also liegt in $(-1, 0)$ ein Minimum vor. **[1]**