Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
SoSe 13

Probeklausur: HM II

Juli 2013
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal stetig differenzierbar in (a, b). f habe mindestens drei verschiedene Nullstellen. Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung von f mindestens eine Nullstelle hat.

Lösung
Seien x_1, x_2, x_3 drei verschiedene Nullstellen von f. Œ gelte $x_1 < x_2 < x_3$. Mit dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ mit

$$0 = 0 - 0 = f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad 0 = 0 - 0 = f(x_3) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_3 - x_2).$$

Da $x_1 < x_2 < x_3$ gilt, muss auch $\xi_1 < \xi_2$ gelten. Weiterhin muss $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ sein.
Wendet man nun den Mittelwertsatz auf f' an, so erhält man:

$$\exists\, y \in (\xi_1, \xi_2) \text{ mit } 0 = f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(y)(\xi_2 - \xi_1).$$

Da $a < \xi_1 < \xi_2 < b$ gilt, ist das die Behauptung.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 9}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{px} - e^{-x}}{\sin(5x)}$, $p \in \mathbb{R}$.

Lösung

(a) Seien $f(x) := 2x^2 - x - 15$ und $g(x) := x^2 - 9$. Dann: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$.

Also ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ „$\frac{0}{0}$".

Um die Regel von de l'Hospital anzuwenden, betrachte $f'(x) = 4x - 1,\ g'(x) = 2x$.

Dann ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)\setminus\{3\}$, und es gilt $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x-1}{2x} = \dfrac{11}{6}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, also gilt nach der Regel von l'Hospital, dass auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und es gilt $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{11}{6}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{px} - e^{-x}}{\sin(5x)}$, $p \in \mathbb{R}$, ist vom Typ „$\frac{0}{0}$". Mit $f(x) := e^{px} - e^{-x}$ und $g(x) := \sin(5x)$ folgt

$f'(x) = pe^{px} + e^{-x},\ g'(x) = 5\cos(5x) \neq 0$ für $x \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ 0 < \varepsilon << 1$.

Dann gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{pe^{px} + e^{-x}}{5\cos(5x)} = \dfrac{p+1}{5}$.

Da der letzte Grenzwert existiert, existieren nach der Regel von l'Hospital auch alle davor, und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{p+1}{5}$.

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{arsinh}(\frac{x}{3})}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

(c) Berechnen Sie für $b>2$ das Integral $\displaystyle\int_2^b \frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$.

(d) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$ konvergiert, und bestimmen Sie ggf. den Wert des Integrals.

Lösung

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx &= x\cdot\log(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\tfrac{1}{1+x^2}\cdot(2x)\,dx\\ &= 1\cdot\log(1+1^2)-0-2\cdot\int_0^1 \tfrac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx\\ &= \log(2)-2\cdot\int_0^1 1-\tfrac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \log(2)-2\cdot(x-\arctan(x))\Big|_0^1\\ &= \log(2)-2\cdot(1-\arctan(1))+2\cdot 0\\ &= \log(2)-2+\tfrac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \tfrac{\operatorname{arsinh}(\frac{x}{3})}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{3}{4}} \tfrac{\operatorname{arsinh}(\frac{x}{3})}{3\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx.$$

Wir substituieren $\frac{x}{3}=\sinh(t)$, $dx = 3\cosh(t)\,dt$ und verwenden $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$. Man erhält

$$\int_0^{\operatorname{arcsinh}(\frac{1}{4})} \operatorname{arsinh}(\sinh(t))\,dt = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\frac{1}{4})} t\,dt = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arcsinh}(\tfrac{1}{4}))^2.$$

(c) Wir verwenden zunächst Partialbruchzerlegung, um den Integranden umzuschreiben.
Wähle den Ansatz

$$\tfrac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)} = \tfrac{A}{x-1}+\tfrac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Dann ergibt sich

$$A=\tfrac{1}{2}, B=-\tfrac{1}{2} \text{ und } C=-\tfrac{1}{2}.$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\int_2^b \tfrac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_2^b \tfrac{1}{x-1}-\tfrac{x}{1+x^2}-\tfrac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\log(x-1)-\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\arctan(x)\right]_2^b\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\log(b-1)-\tfrac{1}{2}\log(1+b^2)-\arctan(b)\Big)+\tfrac{1}{4}\log(5)+\tfrac{1}{2}\arctan(2).\end{aligned}$$

(d) Für $x\geq 2$ hat man

$$\tfrac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)} \leq \tfrac{1}{(x-\frac{x}{2})\cdot(x^2)} \leq \tfrac{2}{x^3}.$$

Da das Integral $2\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergiert, liefert das Majorantenkriterium auch die Konvergenz des Integrals $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$.
Um den Wert zu berechnen, verwende Teil (b).

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{2}\Big(\log(b-1)-\tfrac{1}{2}\log(1+b^2)-\arctan(b)\Big)+\tfrac{1}{4}\log(5)+\tfrac{1}{2}\arctan(2)\\ &=\lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{2}\left(\log(\tfrac{b-1}{\sqrt{b^2+1}})-\arctan(b)\right)+\tfrac{1}{4}\log(5)+\tfrac{1}{2}\arctan(2)\\ &=0-\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{4}\log(5)+\tfrac{1}{2}\arctan(2).\end{aligned}$$

Es ist natürlich auch möglich direkt den Wert zu berechnen und damit die Existenz zu zeigen.

Aufgabe 4

Lösen Sie das folgende separable Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{e^{-(u(t)^2)}\cosh(\mathrm{t})}{2u(t)}, \quad t \in (\pi, \infty), \\ \\ u(\pi) = \sqrt{\log(\sinh(\pi))}. \end{cases}$$

Lösung

Setze $t_0 = \pi$ und $u_0 = \sqrt{\log(\sinh(\pi))}$. Wir berechnen

$$\int_{u_0}^{u(t)} 2ue^{u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[e^{u^2}\Big]_{u=u_0}^{u(t)} = e^{u(t)^2} - e^{u_0^2} = e^{u(t)^2} - \sinh(\pi)$$

und

$$\int_{t_0}^{t} \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sinh(x)\Big]_{x=t_0}^{t} = \sinh(t) - \sinh(t_0) = \sinh(t) - \sinh(\pi).$$

Gleichsetzen liefert

$$e^{u(t)^2} - \sinh(\pi) = \sinh(t) - \sinh(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = \sqrt{\log(\sinh(t))}.$$

Aufgabe 5

Die Funktionenschar $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für $\alpha > 0$ gegeben durch $f_\alpha(x,y) := x^3 - y^3 - 12\alpha^2 xy$. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von α, alle kritischen Punkte von f_α, und geben Sie deren Typ an.

Lösung

f_α ist als Produkt bzw. Summe zweifach stetig diff'barer Funktionen zweifach stetig diff'bar.
Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) = +3x^2 - 12\alpha^2 y, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -3y^2 - 12\alpha^2 x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) = +6x, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) = -6y \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_\alpha(x,y) = -12\alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_\alpha(x,y).$$

Mit der notwendigen Bedingung für kritische Punkte,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = 0,$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} +3x^2 = 12\alpha^2 y, \\ -3y^2 = 12\alpha^2 x. \end{cases}$$

Elementares Umformen und Einsetzen liefert die Menge der kritischen Punkte K_α:

$$K_\alpha = \{(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_\alpha, y_\alpha) = (0,0) \vee (x_\alpha, y_\alpha) = (-4\alpha^2, +4\alpha^2)\}.$$

Weiter gilt

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial y^2} \right]_{|_{(x,y)=(0,0)}} = 144\alpha^4 > 0, \text{ da } \alpha > 0,$$

sowie

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial y^2} \right]_{|_{(x,y)=(-4\alpha^2,+4\alpha^2)}} = -432\alpha^4 < 0$$

und

$$\left[\frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x^2} \right]_{|_{(x,y)=(-4\alpha^2,+4\alpha^2)}} = -24\alpha^2 < 0, \text{ da } \alpha > 0.$$

Also liegen in $(0,0)$ ein Sattelpunkt und in $(-4\alpha^2, +4\alpha^2)$ eine Maximalstelle vor.